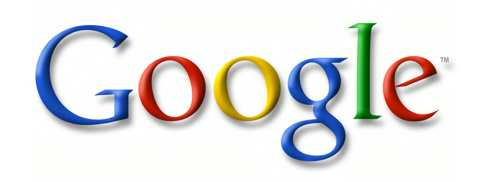
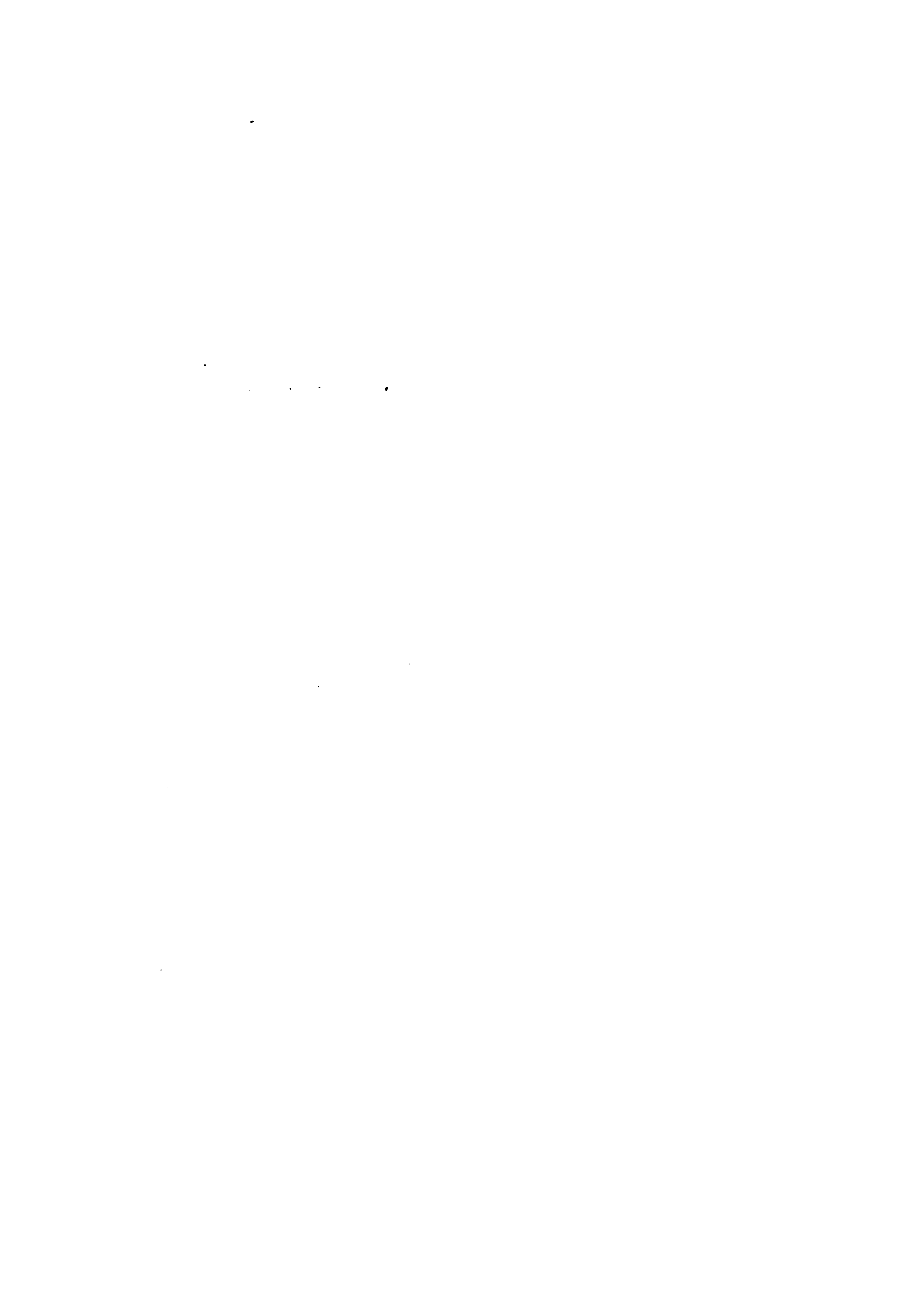














COURS
DE
MATHÉMATIQUE,

CONTENANT

TOUTES LES PARTIES DE CETTE SCIENCE,

MISES A LA PORTÉE DES COMMENÇANTS.

PAR M. CHRÉTIEN WOLF, Professeur de Mathématique & de Philosophie dans l'Université de Hale, Membre des Académies Royales des Sciences de France, d'Angleterre, & de Prusse.

Traduit en François, & augmenté considérablement.

TOME PREMIER,

QUI renferme les Eléments d'Arithmétique, le Calcul des parties décimales, le Calcul littéral, la Géométrie, la Trigonométrie rectiligne, la Méchanique, l'Hydrostatique, l'Airométrie, & l'Hydraulique; avec un Supplément au Calcul littéral.

NOUVELLE ÉDITION.

A PARIS,

Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, rue Dauphine, à l'image Notre-Dame.

M. DCC. LVII.

Avec Approbation, & Privilege du Roi.



AVIS AU RELIEUR,

Pour placer les 69 Planches de cet Ouvrage.

TOUTES les planches se plieront en trois, en conservant le papier blanc pour les faire sortir hors du livre, & se placeront à la fin du traité auquel elles appartiennent, dans l'ordre suivant.

TOME PREMIER.

1 La planche d'Arithmétique, à la fin de l'Arithmétique palpable, *page* 154
0 Il n'y a point de planches au Calcul des décimales, ni aux Eléments du Calcul littéral.
8 Les 8 planches de Géométrie, à la fin des Eléments de Géométrie, 268
1 La planche de Trigonométrie, à la fin de ce traité, 290
3 Les trois planches de Méchanique, à la fin de la Méchanique, 344
1 La planche d'Hydrostatique & d'Airométrie, qui ne fait qu'une seule planche, à la fin de l'Airométrie, 384
2 Les deux planches d'Hydraulique, à la fin des Eléments d'Hydraulique, avant le supplément au Calcul littéral, 404

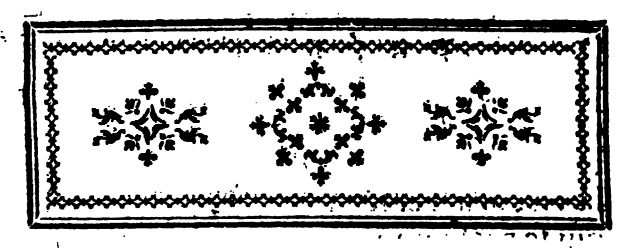
TOME SECOND.

1 La planche d'Optique, à la fin de ce traité, *page* 26
1 La planche de Catoptrique, à la fin de la Catoptrique, 47
2 Les deux planches de Dioptrique, à la fin des Eléments de Dioptrique, 82
6 Les six planches de Perspective, à la fin de ce traité, 114
1 La planche de Géographie, à la fin de la Géographie, 150
0 Il n'y a point de planches au Traité de Chronologie.
4 Les quatre planches de Gnomonique, à la fin des Eléments de Gnomonique, 206
3 Les trois planches d'Astronomie, à la fin de ce traité, 323
2 Les deux planches de Navigation, à la fin du second volume, 357

TOME TROISIEME.



DISCOURS



PRÉFACE
DU TRADUCTEUR.

RIEN de plus propre à joindre l'agréable à l'utile que les Mathématiques. On le ſait, & on l'a reconnu particuliérement dans notre ſiecle, où l'on a trouvé l'heureux ſecret d'unir la ſolidité des ſciences abſtraites avec la politeſſe des connoiſſances du goût. Ce n'eſt plus un terrein hériſſé d'épines & d'un difficile accès; on ſe livre avec ſatisfaction aux méditations profondes que demandent les Mathématiques, quand on eſt capable de goûter le plaiſir que procure la découverte des vérités qui en ſont l'objet; & l'on regarderoit avec raiſon comme des eſprits ſuperficiels, de peu de conſiſtance, & ſans goût, ceux qui s'en formeroient l'idée comme d'une ſcience auſtere & ſauvage, qui ne ſauroit s'allier avec la délicateſſe des belles Lettres.

L'objet des Mathématiques eſt la vérité

pure ; ſes preuves ſont des démonſtrations exactes, & ſes effets des choſes ſurprenantes. Nous avons peu de commodités dans la vie, peu d'embelliſſements dans tout ce qui ſe préſente à nos yeux, dont nous ne ſoyons redevables à ceux qui ont conſacré leurs veilles à cultiver cette ſcience, qu'on regarde à juſte titre comme la clef de toutes les autres. Y a-t-il rien de plus merveilleux que toutes ces machines animées, ſi j'oſe le dire, par les Mathématiques, qui dirigent l'arrangement de leurs reſſorts, reglent leur mouvement, & conduiſent toutes leurs opérations ? Quoi de plus admirable, que ces inſtruments qui décorent les boutiques des artiſans, & qui certainement ne manqueroient pas de ſpectateurs, ſi nous ſavions admirer l'eſprit & l'invention qui y brille par-tout. L'envie de ſavoir, ſi naturelle à l'homme, ſe réveilleroit à cet aſpect : ce deſir ardent d'acquérir toujours de nouvelles connoiſſances, ſe ranimeroit à la vue de ſi belles choſes. Car l'eſprit de l'homme veut tout ſavoir ; & rien ne marque mieux combien il eſt deſtiné à la vérité, que le charme qu'il éprouve quelquefois malgré lui, dans les ſpéculations les plus ſeches de l'algebre.

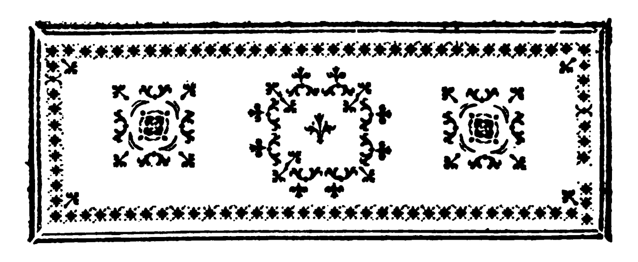
Les Mathématiques, en ouvrant l'eſprit, développent ſes facultés, lui en ménagent l'uſage, & le forment à la préciſion.

Elles l'habituent à l'attention en le fixant; elles lui donnent de l'étendue en multipliant ses lumieres, de la pénétration & de la délicatesse par l'exercice; leur méthode y grave insensiblement cet ordre dans les idées & cette justesse de raisonnement qui rendent un homme véritablement homme. Mais la méthode qui produit de si beaux fruits, est celle des anciens Géometres, & de laquelle nous remettons à parler dans le Discours préliminaire, à la suite de cette Préface.

Le grand ouvrage que M. Wolf avoit donné selon cette méthode, premiérement en Allemand, puis en Latin, ayant paru d'une trop grande étendue pour le donner en leçons dans le temps fixé pour un Cours de Mathématiques, il en fit un abrégé pour l'usage particulier des Ecoles; mais cet abrégé est si succinct que je n'ai pas cru devoir me contenter d'en donner une simple traduction. Je suis entré dans un plus grand détail: j'ai changé quantité de choses qui ne me paroissoient pas du goût françois: j'ai souvent étendu le discours beaucoup plus qu'il ne l'étoit dans l'original: j'ai inseré des remarques, sans les distinguer du texte, dans bien des endroits où je les ai cru nécessaires. J'ai ajouté quantité de définitions des termes

& des choses, des suppléments à certains traités, des traités même entiers, pour rendre l'ouvrage complet; tels sont l'Arithmétique palpable dans le premier volume, la Navigation dans le second, & les Feux d'Artifice dans le troisieme, dans lesquels je n'ai suivi M. Wolf, pour ainsi dire, que dans la méthode. Ces augmentations & ces changements m'ont obligé d'augmenter de près de la moitié le nombre des planches, dont j'ai changé la plupart des desseins, & les ai fait graver avec plus d'élégance & de goût : de maniere que c'est un ouvrage tout nouveau, ou du moins si différent de ce que M. Wolf avoit dit sur ces matieres, qu'il ne s'y reconnoîtroit pas lui-même. Les Lecteurs trouveront dans ces trois volumes, non seulement de quoi se former une idée des sciences qui y sont traitées, mais tout ce qu'il faut pour être en état de les entendre, d'en parler avec exactitude, & de les étudier par eux-mêmes dans les livres qui en traitent plus au long. Le public attendoit cette traduction avec impatience : il est heureux pour moi d'avoir travaillé à le satisfaire; mais je m'estimerai plus heureux encore, si mon travail remplit pleinement les vues que je me suis proposées.

DISCOURS



DISCOURS PRÉLIMINAIRE

SUR LA MÉTHODE DONT ON SE SERT, pour traiter les Mathématiques.

§. I.

LA *Méthode Mathématique* n'eſt autre choſe que l'ordre que ſuivent les Mathématiciens en traitant les ſciences qui font partie des mathématiques. On commence par les *Définitions*, on continue par les *Axiomes*, d'où l'on forme des *Théorêmes*, puis des *Problêmes*, qui produiſent des *Corollaires*, & l'on y lie des *Remarques*, ſelon que les uns ou les autres en ont beſoin.

§. II.

Les *Définitions* ſont des notions claires & diſtinctes par le moyen deſquelles on diſtingue non ſeulement une choſe d'avec une autre, mais qui nous y feront encore découvrir tout ce qu'on peut en concevoir. On les réduit à deux ſortes, les *Définitions nominales*, & les *Définitions réelles*, ou, ſi l'on veut, *Définitions des noms* & *Définitions des choſes*.

§. III.

Les définitions des noms renferment des marques ſuffiſantes pour faire diſtinguer une choſe qui porte tel ou tel nom, d'avec une autre choſe qui en porte un différent : comme lorſqu'on dit dans la Géométrie, le quarré eſt une figure qui a quatre angles & quatre côtés.

§. IV.

Les définitions réelles expliquent clairement la formation des choſes, c'eſt-à-dire, la maniere dont elles ſe font. Telle eſt, par exemple, la définition du cercle dans la Géométrie, lorſqu'on dit qu'il ſe fait par le mouvement d'une ligne droite autour d'un point fixe.

§. V.

La *Notion* eſt la repréſentation que l'eſprit ſe forme de quelque choſe que ce puiſſe être.

§. VI.

La *Notion claire* eſt celle qui ſuffit pour reconnoître une choſe qui nous eſt préſentée ; pour dire, par exemple, une telle figure eſt un *triangle*.

§. VII.

La *Notion obſcure* ou *confuſe* eſt au contraire celle qui ne ſuffit pas pour déterminer préciſément ce que c'eſt que telle choſe. Si l'on me mon-

tre, par exemple, une plante, & que l'ayant examinée, je doute encore si je l'ai vue ailleurs, ou si cette plante est celle qui porte tel ou tel nom, c'est alors une notion obscure.

§. VIII.

Une notion claire est *distincte*, lorsqu'on peut expliquer les marques auxquelles on reconnoît la chose qu'on nous présente; par exemple, que le cercle est une figure terminée par une ligne courbe revenant sur elle-même, dont chaque point est également éloigné de celui qui est au centre.

§. IX.

Une notion claire est *confuse* quand vous ne pouvez dire ce à quoi vous reconnoissez telle chose, quoiqu'elle ait néanmoins des marques qui la distinguent des autres. Telle est, par exemple, la notion qu'on a de la couleur rouge.

§. X.

La notion distincte est *entiere*, & peut être censée *parfaite*, lorsque vous connoissez distinctement toutes les parties qui composent une chose, & les marques qui vous la font distinguer d'une autre. Par exemple, la notion du cercle dont je viens de parler (§. VIII) est censée une notion parfaite, si vous avez une connoissance distincte d'une courbe qui retourne sur elle-même, d'un point placé au milieu, d'une égalité de distance, & de la termination.

§. XI.

La notion eſt au contraire *imparfaite*, ſi l'on n'a que des connoiſſances confuſes & obſcures des parties de la choſe & des marques qui la diſtinguent d'une autre.

§. XII.

On n'admet dans les mathématiques que des notions diſtinctes, & même autant entieres & parfaites qu'elles peuvent l'être, quand il s'agit de donner des définitions des noms & des choſes.

§. XIII.

Ainſi dans les définitions contenues dans cet ouvrage on n'emploiera que des termes aſſez intelligibles par eux-mêmes, ou dont l'explication aura précédé.

§. XIV.

Lorſque nous nous contentons d'une notion confuſe, nous ſuppoſons qu'on peut avoir aiſément entre les mains les choſes dont on veut parler, pour s'en inſtruire par ſes propres yeux; ou que l'ayant vue ſouvent, il ſera facile de ſe la retracer dans la mémoire.

§. XV.

Quant aux définitions réelles, elles nous apprennent comment la choſe eſt poſſible, c'eſt-à-dire, la voie qu'il faut tenir, & de la maniere de

former cette chose (§. IV). Voilà pourquoi il y a deux choses à observer sur cette espece de définition : 1°. savoir si ce qui doit concourir à la formation de la chose existe, ou peut exister : 2°. si elles ont véritablement les propriétés que nous leur attribuons ; par exemple, s'il est vrai *qu'un cercle se puisse faire par le mouvement d'une ligne droite autour & à égale distance d'un point fixe.* Il faut, pour que la chose soit possible, un point, une ligne droite, l'immobilité d'un point qui puisse régler le mouvement de la ligne ; & enfin un mouvement de la ligne tel qu'elle retourne au point même d'où elle étoit partie.

§. XVI.

On peut considérer les définitions de noms & les définitions réelles en elles-mêmes, & les comparer les unes aux autres. Lorsqu'en les considérant on en conclut immédiatement quelque chose, ce qu'on en conclut s'appelle *Axiome*. En examinant, par exemple, la formation d'un cercle, on en conclut aisément que toutes les lignes menées du centre à la circonférence, sont égales, puisqu'elles ne représentent qu'une même ligne placée en différents endroits du cercle, & voilà pourquoi cette proposition passe pour un axiome : M. de Tschirnausen prend ce terme dans ce sens-là. On appelle communément *Axiome*, toute proposition qui est si évidente, qu'elle n'a pas besoin de démonstration ; ce qui est conforme à l'idée qu'Euclide & les autres anciens Géometres en ont eue.

§. XVII.

Les axiomes expriment l'exiſtence d'une choſe, ou ſa poſſibilité. Ceux de la premiere eſpece ſont ceux dont nous venons de donner un exemple ; à ſavoir, *toutes les lignes menées du centre d'un cercle à ſa circonférence ſont égales entre elles*. Les axiomes de la ſeconde eſpece ſont, par exemple, la propoſition qui naît de la définition de la ligne droite ; à ſavoir que *d'un point à un autre point on peut tirer une ligne droite*. Les axiomes de cette eſpece s'appellent *pétitions* ou *demandes*.

§. XVIII.

Comme la vérité de ces deux eſpeces d'axiomes eſt connue par le ſeul aſpect des définitions d'où ils naiſſent, ils n'ont beſoin d'aucune démonſtration ; car cette même vérité devient évidente par la ſeule preuve de la réalité des définitions. C'eſt pourquoi on ne peut porter un jugement certain ſur la vérité ou la fauſſeté d'un axiome, avant d'avoir examiné la poſſibilité de la définition Autrement on ſeroit ſimplement aſſuré que l'axiome ſera vrai, ſi l'on ſuppoſe la définition poſſible.

§. XIX.

On confond quelquefois ces deux eſpeces d'axiomes avec les expériences. Or nous diſons *ſavoir une choſe par expérience*, lorſque la connoiſſance que nous en avons nous eſt venue de l'attention que nous avons faite ſur nos propres perceptions : par exemple, lorſqu'on allume une chan-

delle dans un lieu obſcur, nous voyons autour de nous bien des choſes que nous n'appercevions pas auparavant; nous diſons alors que nous ſavons par expérience qu'on ne peut voir dans l'obſcurité ſans lumiere. Les expériences ne ſont donc que des propoſitions qui regardent des choſes particulieres, puiſque nous n'appercevons les choſes qu'en particulier.

§. XX.

Lorſqu'ayant comparé pluſieurs définitions les unes avec les autres, nous inférons quelque propoſition que nous n'aurions pu tirer de l'examen d'une ſeule, la concluſion que nous en tirons s'appelle *Théorême*. Par exemple, dans la Géométrie, je compare un triangle avec un parallélogramme poſés ſur la même baſe, & ayant même hauteur. J'infere, partie de leurs définitions, partie de leurs propriétés déja connues, qu'un tel parallélogramme eſt le double du triangle; alors cette propoſition, *un triangle eſt la moitié d'un parallélogramme qui a même baſe & même hauteur*, eſt un *Théorême*.

§. XXI.

Deux choſes dans les Théorêmes demandent beaucoup d'attention : la *propoſition* en elle-même & la *démonſtration*. La premiere indique ce qui peut convenir ou non à une choſe, certaines conditions une fois poſées; la ſeconde donne & explique les raiſons qui nous font concevoir que cela convient à une telle choſe, ou ne lui convient pas.

§. XXII.

Les principes des démonſtrations ſont en partie les définitions des termes & des choſes contenus dans la propoſition, & en partie les propriétés que nous découvrons des choſes dans leurs définitions. Or comme on n'admet point de principes dans les mathématiques, qui n'aient été prouvés auparavant, on cite communément les définitions & les propoſitions d'où on les a tirés, tant pour montrer la ſimplicité & la vérité des principes ſur leſquels on établit ſon raiſonnement, que pour indiquer à ceux qui ne ſont pas bien au fait, les ſources de la certitude de ces mêmes principes.

§. XXIII.

La méthode qu'on ſuit dans les mathématiques pour tirer les conſéquences des principes, eſt la même que celle qu'on trouve dans les traités de Logique, où l'on parle du ſyllogiſme : car les démonſtrations des Mathématiciens ne ſont autre choſe qu'un aſſemblage d'enthymêmes ; de façon qu'on y conclut tout par la force des ſyllogiſmes, excepté qu'on omet ſouvent les prémiſſes qui ſe préſentent d'elles-mêmes à l'eſprit, ou que l'on rappelle dans la mémoire à l'aide des citations. Clavius prouve ce que nous venons de dire dans ſa démonſtration de la premiere propoſition des Eléments d'Euclide. Herlinus & Daſipodius ont démontré par des ſyllogiſmes en forme, les ſix premiers livres des Eléments d'Euclide, & Heniſchius toute l'Arithmétique.

§. XXIV.

Les *Problêmes* proposent quelque chose à faire; & sont composés de trois parties, qui sont la *Proposition*, la *Solution* & la *Démonstration*. Dans la proposition on indique ce qu'on propose à faire; la solution donne par ordre tous les moyens de réussir à faire la chose proposée; & la démonstration prouve qu'on doit nécessairement en venir à bout, en suivant la méthode & les moyens que la solution prescrit. C'est pourquoi toutes les fois qu'un Problême a besoin de démonstration, on le convertit en Théorême, dont la proposition constitue la question, & la solution forme l'*hypothese*. Car telle est ordinairement la teneur de tous les Problêmes auxquels il faut une démonstration; & en suivant ce que prescrit la solution, on fait en même temps la chose proposée.

§. XXV.

On est quelquefois obligé d'appliquer à certains cas particuliers des propositions générales, d'où l'on tire souvent d'autres propositions dont la conséquence est aisée. Alors ces propositions se nomment *Corollaires*.

§. XXVI.

Dans les *Remarques* ou *Scholies*, on dit ce qu'il y a d'obscur; on répond aux choses qui sont douteuses; on indique l'usage des sciences, les sources où l'on peut étudier les matieres, les Auteurs qui en ont traité; enfin tout ce qu'il est bon, utile & agréable à savoir.

§. XXVII.

Tout homme qui fera un peu d'attention à la méthode que nous venons d'expliquer, verra facilement qu'elle est universelle, & qu'on ne peut guere, sans la suivre, parvenir à une solide connoissance des choses. On lui a donné le nom de *Méthode Mathématique*, & même souvent celui de *Méthode des Géometres*, parceque les Mathématiciens ont été jusqu'ici presque les seuls qui l'aient suivie scrupuleusement.

§. XXVIII.

La méthode dont nous venons de parler étant si conforme au goût universel, & à la façon commune de raisonner, est-il surprenant qu'on regarde les Mathématiques comme l'étude la plus propre à donner de l'ouverture à l'esprit, & à former le jugement? On remarque dans ceux qui cultivent cette science, une facilité & une promptitude étonnante à saisir le vrai des autres sciences auxquelles ils s'appliquent dans la suite; pendant que tant d'autres qui d'ailleurs ont de l'esprit, de la force d'imagination, du jugement même, ont tant de peine à en venir à bout; & cela parcequ'ils ne se sont pas formé l'habitude d'un certain ordre & d'une certaine exactitude dans leurs jugements.

§. XXIX.

Tous ceux qui emploient donc tout leur temps à l'étude de certaines pratiques & de certaines sciences qui ne font point partie des Mathémati-

ques, mais qu'on regarde communément comme leur appartenant, n'en retireront jamais tout le fruit qu'on peut se promettre de l'étude des Mathématiques. Car quoique ces sortes de sciences soient d'ailleurs fort utiles au commerce de la vie, elles ne seront jamais bien capables de leur donner cette force d'esprit, cette vivacité, & cette habitude d'invention que l'on puise dans l'étude des véritables mathématiques, parceque tout cela est le fruit des méditations & des réflexions sérieuses que l'on fait sur les démonstrations.

La *Méthode* est l'art de bien disposer une suite de plusieurs raisonnements, tant pour découvrir la vérité d'un théorême quand nous l'ignorons, que pour la démontrer aux autres quand nous l'avons trouvée. Il y a deux méthodes générales pour rechercher les vérités dans les mathématiques; savoir la *Synthese* & l'*Analyse*. Celle dont on se sert pour résoudre un problême mathématique se nomme *Zététique*; & celle qui détermine quand, par quelle raison, & en combien de façons un problême peut se résoudre, s'appelle *Poristique*.

La *Synthese* est l'art de chercher les vérités ou les démonstrations, la possibilité ou l'impossibilité d'une proposition, par des raisonnements tirés des principes, c'est-à-dire, par des propositions qui se démontrent l'une par l'autre, en commençant par les plus simples, pour passer aux plus générales & plus composées, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la *conclusion* qui nous donne une connoissance claire & distincte de la vérité qu'on cherche.

L'*Analyse* est l'art de découvrir la vérité ou la fausseté, la possibilité ou l'impossibilité d'une proposition par un ordre contraire à celui qu'on suit

dans la ſynthese ; ſavoir en ſuppoſant la propoſition telle qu'elle eſt, & en examinant ce qui s'enſuit de là, juſqu'à ce qu'on ſoit venu à quelque vérité claire, ou à quelque impoſſibilité dont ce qui a été propoſé ſoit une ſuite néceſſaire, pour conclure de là la vérité ou l'impoſſibilité de la propoſition.

L'*Hypotheſe* eſt une ſuppoſition de ce qui n'eſt pas pour ce qui peut être ; auſſi n'eſt-il pas néceſſaire que l'hypotheſe ſoit véritable, mais il ſuffit qu'elle ſoit poſſible. C'eſt pourquoi on peut faire pluſieurs hypotheſes différentes ſur un même ſujet.



ELÉMENTS



ELEMENS D'ARITHMETIQUE.

DEFINITION PREMIERE.



1. L'ARITHMETIQUE est la Science qui apprend à compter.

On entend par compter, sçavoir ajouter, soustraire, multiplier, & diviser. Comme 6 & 8 font 14, c'est *ajouter*; qui de 12 ôte 5, reste 7, c'est *soustraire*; si l'on dit 3 fois 8 font 24, c'est *multiplier*; enfin 5 est dans 20 quatre fois, c'est *diviser* 20 par 5.

Remarque.

2. Par le mot de *Science*, on veut signifier tout ce qui est déduit de principes clairs & évidens.

DEFINITION II.

3. Le *Nombre* est l'assemblage de plusieurs unités de même espece, par exemple, si à un écu on ajoute un autre écu, on aura deux écus; ainsi 2, 3, 4, &c. sont des Nombres.

Corollaire I.

4. On ne peut faire la comparaison d'aucun nombre, si ces nombres ne sont pas composés d'unités de même espece ; c'est pourquoi, lorsque je prononce 6, cela suppose que les 6 unités sont toutes de même genre, ou de même espece.

Remarque.

5. On se sert de ce mot *homogene*, lorsqu'on veut exprimer des choses de même espece, comme des toises sont homogenes à des toises, des boisseaux à des boisseaux, &c.

Corollaire II.

6. Un nombre devient plus grand, lorsqu'on lui ajoute des unités de même espece, & il devient plus petit, lorsqu'on en ôte des unités de même espece.

Corollaire III.

7. On peut augmenter un nombre de deux manieres, ou en répétant le même nombre plusieurs fois, comme si l'on veut ajouter 6 une fois, deux fois, trois fois, &c. à lui-même, ou en ajoutant à 6 tel autre nombre que l'on voudra, comme 6 à 8.

Corollaire IV.

8. Il est clair qu'on peut faire le même raisonnement quand il s'agit de diminuer un nombre ; ainsi je puis de 18 ôter 6 une fois, ou plusieurs fois, ou de 18 en ôter un autre nombre, comme 5, 7, &c.

Remarque.

9. Il suit de ces deux derniers Corollaires, qu'il n'y a que quatre Regles, qui sont celles que nous

avons nommées ci-dessus; car ajoute-t-on deux nombres différens ensemble, c'est l'*Addition*; ajoute-t-on le même nombre plusieurs fois, c'est la *Multiplication*; soustrait-on un nombre d'un autre, c'est la *Soustraction*; mais soustrait-on plusieurs fois le même nombre d'un autre, c'est la *Division*.

DEFINITION III.

10. *Ajouter*, c'est trouver la somme de plusieurs unités semblables. Dans l'Addition, on donne les grandeurs particulieres dont on cherche une seule expression qu'on nomme *somme*.

Corollaire.

11. Puisque tout nombre est composé de plusieurs unités semblables (§ 3.), on aura fait l'Addition, si on ajoute successivement ces nombres les uns aux autres.

Remarque.

12. Pour faire l'Addition, on suppose qu'on sçache ajouter les neuf premiers chiffres ensemble, comme 8 & 5 font 13, 9 & 6 font 15.

DEFINITION IV.

13. *Soustraire*, c'est chercher la différence de deux nombres; ainsi veut-on soustraire, ou ôter 8 de 10, il reste 2, ce reste s'appelle *excès* ou *difference*, ce qui montre que par la Soustraction, on trouve un nombre qui joint au plus petit, égale le plus grand, comme 8 avec 2, qui est la différence, est égal à 10.

Corollaire.

14. Tout nombre étant composé d'unités (§ 3.),

on aura fait la Soustraction, si des unités d'un nombre proposé, on ôte successivement les unités de l'autre nombre donné.

Remarque.

15. La Soustraction suppose aussi qu'on sçache ôter les nombres les uns des autres, comme de 9 ôtez 4, reste 5; & encore de 15 ôtez 7, reste 8; de 18 ôtez 9, reste 9.

DEFINITION V.

16. *Multiplier*, c'est répéter le même nombre plusieurs fois, ou l'ajouter à lui-même plusieurs fois. Le nombre qu'on veut répéter s'appelle *Multiplicande*, & l'autre qui marque le nombre de répétitions s'appelle *Multiplicateur*; ce qui résulte de la Multiplication, se nomme *produit*; ainsi si l'on multiplie 8 par 5, le nombre 8 est le multiplicande, 5 le multiplicateur, & 40 le produit.

Corollaire.

17. La Multiplication n'est, comme l'on voit, qu'une Addition réitérée, mais une certaine quantité de fois déterminée, comme dans l'exemple de la Définition cinquiéme, quand on multiplie 8 par 5, 8 est réitéré 5 fois, ce qui fait voir que 40 qui est le produit, contient 8 autant de fois que 5 contient 1.

DEFINITION VI.

18. *Diviser*, c'est chercher combien de fois un nombre est contenu dans un autre; si l'on cherche combien de fois 4 est dans 12, cela s'appelle diviser : il y a trois nombres à distinguer dans la Division, celui qui divise, ou *Diviseur*, celui qui est di-

visé, ou *Dividende*, & celui qui exprime combien de fois le diviseur est dans le dividende, qui se nomme *Quotient* ou *Exposant*; c'est celui qu'on cherche.

Corollaire I.

19. La Division n'est autre chose qu'une Soustraction réitérée. Dans la Division on cherche le nombre de fois que le diviseur peut se soustraire du dividende, & c'est ce nombre de fois qu'on nomme *Quotient*, ou *Exposant*.

Corollaire II.

20. On peut donc conclure que le diviseur est contenu dans le dividende autant de fois que l'unité l'est dans le quotient, puisque le diviseur est soustrait du dividende autant de fois que le quotient contient l'unité.

Axiome I.

21. Chaque nombre est égal à lui-même.

Remarque.

22. C'est-à-dire que 6 qui peut venir de la somme de 4 & 2, ou du produit de 2 par 3, ou de 12 divisé par 2, fait toujours le même nombre 6.

Axiome II.

23. Deux choses égales à une troisiéme, sont égales entre elles, & toutes trois sont égales.

Remarque.

24. C'est-à-dire, si Jean & Jacques sont égaux à Pierre, ces trois personnes seront égales, & Jean & Jacques seront égaux entr'eux.

Axiome III.

25. Si à des choses égales, on ajoute choses égales, les sommes seront égales ; & si à choses inégales, vous ajoutez choses égales, les sommes seront inégales.

Axiome IV.

26. Il faut dire la même chose de la Soustraction.

Axiome V.

27. Si vous multipliez choses égales par choses égales, les produits seront toujours égaux ; mais si vous multipliez choses inégales par choses égales, les produits seront inégaux.

Axiome VI.

28. Il faut raisonner de la même maniere pour des grandeurs égales ou inégales, qui sont divisées par grandeurs égales.

Corollaire.

29. Si l'on suppose que deux personnes fassent un Calcul, & qu'aucune des deux ne se soit trompée, elles doivent trouver la même chose.

Axiome VII.

30. Si *A* est plus grand que *B*, il est clair que *A* sera plus grand que toutes les grandeurs qui seront égales à *B*.

Axiome VIII.

31. Un tout est égal à toutes ses parties, & conséquemment plus grand qu'aucune de ses parties.

Hypothèse I.

32. On est convenu dans la Numeration de nombrer par dixaines.

Remarque.

33. Cette maniere de compter est générale, & elle paroît naturelle, parce que nous y sommes accoutumés dès la plus tendre jeunesse; elle doit probablement son origine à l'habitude qu'ont presque tous les hommes, de compter par leurs dix doigts.

Corollaire.

34. Les nombres de la premiere dixaine ont des noms particuliers, comme chacun de ceux qui expriment les autres dixaines; ainsi, un, deux, trois, quatre, &c. sont les noms de la premiere dixaine, & vingt, trente, quarante, sont les noms de la seconde, troisiéme, quatriéme dixaine.

Hypothèse II.

35. Dix fois dix, se nomme cent, dix fois cent se nomme mille, & mille fois mille se nomme un million, &c. on peut ensuite employer les noms de milliars, billions, trillons, quatrillons, ainsi de suite.

Remarque.

36. On emploie ces sortes de noms, ou l'on se sert de ces dénominations, pour éviter l'obscurité, & se donner quelque idée de la quantité que ces nombres expriment

Hypothèse III.

37. On a inventé neuf caracteres tels que 1 2 3 4 5 6 7 8 9, pour signifier les neuf pre-

mieres unités ; & pour pouvoir exprimer ou marquer les dixaines, centaines, mille, &c. on est convenu d'atttribuer à ces mêmes figures une valeur qu'on peut appeller valeur locale, c'est-à-dire que le même chiffre étant seul, il n'exprime que de simples unités, & des dixaines lorsqu'il est suivi d'un caractere, & des centaines si pareillement il est accompagné de deux autres figures, &c. L'on est encore convenu que cette figure (0), seroit la marque de la négation, soit des unités, soit des dixaines, soit des centaines, &c. ainsi pour marquer trois cens quarante-cinq, on écrira 345, & pour marquer trois cens deux, on écrira 302, où le zero marque la suppression des dixaines.

Problême I.

38. Enoncer en françois un certain nombre de chiffres proposés, c'est-à-dire, assigner à chaque chiffre sa valeur propre.

Regle.

Soit donné le nombre 78432597, il s'agit de le nombrer : partagez les chiffres de trois en trois, en commençant par la droite 78, 432, 597. La premiere tranche à droite est celle des unités, la seconde des mille, & la troisiéme des millions ; on dira donc, soixante & dix-huit millions, quatre cens trente-deux mille, cinq cens quatre-vingt dix-sept ; & dans cet Exemple : 70^{millions}, 402^{mille}, $097^{\text{unités}}$, soixante & dix millions, quatre cens deux mille, quatre-vingt dix-sept.

Demonstration.

La Demonstration est évidente par les hypothèses établies aux Numeros 32. 35. 37.

Problême II.

39. Ajouter plusieurs nombres proposés.

Regle.

1°. Rangez les unités sous les unités, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines.

2°. Puis tirez sous ces nombres une ligne pour éviter la confusion.

3°. Commencez par les unités que vous ajouterez toutes ensemble, voyez combien elles contiennent de dixaines que vous retiendrez pour les ajouter avec les dixaines; passez ensuite au rang des dixaines que vous ajouterez pareillement, si dans ces dixaines il y a des centaines vous les retiendrez pour les ajouter aux centaines; ainsi de suite.

Soit proposé l'exemple suivant

$$\begin{array}{r} 3578 \\ 524 \\ 63 \\ \hline 4165 \end{array}$$

Dites 3 & 4 font 7 & 8 font 15, écrivez 5 sous la ligne au rang des unités, & retenez 1 (c'est-à-dire une dixaine), vous direz ensuite 1 & 6 font 7 & 2 font 9 & 7 font 16 (c'est-à-dire 16 dixaines.) vous poserez 6 *dixaines* sous les dixaines, & vous retiendrez 1 centaine; puis vous direz 1 *centaine* & 5 font 6 & 5 font 11 *centaines*, on écrira sous la ligne 1 *centaine* & l'on retiendra 1 mille, pour dire enfin 1 & 3 font 4, & on aura quatre mille cent soixante & cinq.

Demonstration.

Il est clair par l'operation que le nombre trouvé contient toutes les unités, toutes les dixaines, toutes

les centaines, &c. du nombre que l'on avoit proposé; donc il est égal à la somme de tous ces nombres, ce que l'on cherchoit.

Remarque premiere.

40. On doit remarquer que l'on n'écrit jamais au-dessous de la ligne que le chiffre qui excede les dixaines, cela est général pour tous les rangs.

Si la somme d'un des rangs exprime un nombre juste de dixaines, vous poserez un (o), & vous retenez le nombre de dixaines pour l'ajouter au rang suivant qui est vers la gauche; par exemple

$$\begin{array}{r} 325 \\ 533 \\ 242 \\ \hline 1100 \end{array}$$

On dira 2 & 3 font 5 & 5 font dix, vous poserez sous la ligne o & vous retiendrez (1) que vous ajouterez à 4, ce qui fait 5 qui ajoutés à 3 font 8 & 2 font dix, on posera (o) & on retiendra (1) que vous ajouterez pareillement aux chiffres du troisiéme rang ou de la troisiéme colonne.

Remarque seconde.

41. Il n'y a point de meilleur moyen pour sçavoir si l'on ne s'est point trompé dans l'operation, (ce qui ne peut arriver que par le défaut d'attention) que de recommencer la regle en comptant de haut en bas, si l'on a commencé de bas en haut; les autres manieres sont plus propres à jetter dans l'erreur qu'à l'éviter.

Remarque troisiéme.

42. Les Mathématiciens se servent communément de ce signe + pour marquer que deux choses sont ajoutées ensemble, comme $(3+6)$ signifie qu'on ajoute 6 à 3, & on dit que ce caractere + est le signe de l'Addition.

Remarque quatriéme.

43. Les nombres proposés ci-dessus s'appellent nombres simples ou incomplexes, parce qu'ils n'ont point de dénomination particuliere. Au contraire si ces nombres signifient des grandeurs particulieres qui sont censées être divisées en plusieurs parties ou sous-especes plus petites; on nomme alors ces quantités, nombres complexes; par exemple

25#	13 f.	9 d.
42	17	8
54	18	11
123#	10 f.	4 d.

La livre se divisant en 20 parties qu'on appelle sols, & le sol en 12 parties qu'on nomme deniers, ces nombres sont dits complexes, & ces subdivisions sont arbitraires en soi; elles sont inventées pour l'usage qu'on en fait dans le Commerce. Il en est de même de cet autre exemple qui contient des toises, pieds, pouces. La toise se divise en 6 pieds, le pied en 12 pouces, & le pouce en 12 lignes.

14 toises.	5 pieds.	8 pouc.
25	4	10
9	3	7
50 tois.	2 pieds.	1 pouc.

Pour faire les Additions de cette nature, il faut

commencer par la plus basse espece, c'est-à-dire; par les deniers dans le premier exemple, & par les pouces dans le second, & l'on retiendra le nombre de sols qui seront contenus dans les deniers, qu'on ajoutera avec les sols, & si les sols valent des livres, on retiendra ces livres pour les ajouter au rang des livres. Il suffit en general de sçavoir le rapport des subdivisions pour opérer facilement.

Problême III.

44. Soustraire un plus petit nombre d'un plus grand.

Regle.

1°. Il faut écrire le plus petit nombre sous le plus grand, avec cette condition, que les unités soient sous les unités, & les dixaines sous les dixaines, &c,

2°. Puis on tirera une ligne sous ces chiffres.

3°. Ensuite on ôtera les unités des unités, les dixaines des dixaines, les centaines des centaines, &c. on écrira les restes sous cette ligne & la Soustraction sera faite.

Soit proposé l'exemple suivant

$$\begin{array}{r} 6845 \\ \underline{3523} \\ 3322 \end{array}$$

On dira de 5 ôtez 3 reste 2; de même si de 4 on ôte 2 reste 2, de 8 ôtez 5 reste 3, ainsi de suite.

Remarque.

45. Il peut arriver que quelques-uns des chiffres qui soustrayent soient plus grands que ceux dont on soustrait, c'est-à-dire que l'unité ne puisse être ôtée de l'unité, ou la dixaine de la dixaine, &c. il faut

alors emprunter du chiffre précédent à gauche une unité qui vaudra une dixaine (§ 37.) dans le rang pour lequel on emprunte ; par exemple, soit donné

$$\begin{array}{r} 7462 \\ \underline{5357} \\ 2105 \end{array}$$

On dira qui de 2 ôte 7 cela ne se peut, il faut emprunter du chiffre précédent 1 qui vaudra une dixaine dans le rang pour lequel on emprunte (§ 37) on aura donc 12, dont ôtant 7, il restera 5, le chiffre 6 ne vaudra plus que 5, on continuera en disant : de 5 ôtez 5 reste 0, qu'il faudra écrire pour conserver le rang aux autres chiffres (§ 37.) c'est-à-dire afin qu'ils soient dans leur place, puis achever comme ci-dessus.

Lorsqu'on fait une Soustraction, on peut rencontrer des zeros comme dans l'exemple proposé,

$$\begin{array}{r} 50060 \\ \underline{32632} \\ 17428 \end{array}$$

Il faut avoir recours au chiffre positif dont on emprunte une unité ; ainsi on dira de 0 ôtez 2, cela ne se peut, on prendra donc sur le 6 une unité qui vaut 10 (§ 37.) ; or si de 10 on ôte 2, reste 8, ensuite de 5 ôtez 3, reste 2 ; pour le troisiéme rang on a le même embarras, à cause du (0), & comme il n'y a point de chiffre positif qui précede, on a recours au 5 duquel on emprunte 1 qui est (§ 37.) une dixaine de mille, dont on laisse par la pensée 9 dixaines de mille sur le premier zero, & l'autre mille, ou les dix centaines qui restent de cette décomposition, s'attribuent au premier zero,

ce qui fait que l'on dit, si de 10 on ôte 6 reste 4; puis de 9 ôtez 2 reste 7, & de 4 (car le 5 n'est diminué que d'une unité) ôtez 3, reste 1, & l'opération est finie. Ce sont-là tous les cas qui peuvent se rencontrer dans la Soustraction : on doit voir la raison pour laquelle on dit que le premier zero vaut dix, & les autres neuf, quand il y en a plusieurs de suite.

Démonstration.

Par l'opération on voit que le reste qu'on trouve est la différence des deux nombres donnés, puisqu'on ôte l'unité de l'unité, la dixaine de la dixaine, &c. or le reste de chacune des parties est égal au reste total, & conséquemment ce reste ajouté au nombre qui a soustrait, sera égal au nombre donné.

Remarque.

46. Si donc on vouloit connoître si l'opération est bien faite, l'on ajouteroit (§ 13.) le reste au nombre de dessous, la somme doit être égale au nombre de dessus, ou au plus grand, comme l'on peut voir ci-après.

```
  89456
 {57638}
 {31818}
 -------
  89456
```

Remarque.

47. On est convenu de ce signe — qu'on nomme le signe *moins*, pour marquer la Soustraction; ainsi pour marquer la différence de 8 & de 5, on écrit de cette maniere 8 — 5 égal à 3.

Remarque.

48. La Soustraction composée est celle qui renferme des nombres complexes, comme

De	436#	13f.	8d.
Otez	209	10	9
Reste	227	2f.	11d.

On empruntera 1f. qui vaut 12d., & on dira 12 & 8 font 20 ; or si de 20 on ôte 9, reste 11, & le reste à l'ordinaire.

Il suffit de sçavoir le rapport des parties ou sous-especes les unes aux autres, comme on l'a dit (§ 43.) ainsi on aura soin d'emprunter au rang des livres, pour les sols, s'il est nécessaire ; on fera le même raisonnement pour toutes sortes de sous-especes, on aura toujours recours à l'espece supérieure quand il sera besoin d'emprunter.

Problême IV.

49. Construire le *Livret*, on l'appelle la Table de Pythagore, c'est-à-dire une Table où les produits des neuf premiers chiffres les uns par les autres soient marqués, & cela pour faire la multiplication avec plus de facilité.

Résolution.

1°. On fera un quarré dont on partagera chaque côté en 9 parties égales, & par chaque division, on tirera des lignes paralleles à chacun des côtés, ce qui réduira le quarré en plusieurs autres petits quarrés.

2°. Dans la premiere tranche horisontale on placera les 9 premiers chiffres, ainsi que dans la tranche perpendiculaire.

3°. Puis dans la ſeconde tranche perpendiculaire; on ajoutera à ſon premier chiffre le nombre 2, ce qui fera 4, & à ce même 4 on ajoutera pareillement 2, on aura 6, ainſi de ſuite; à la troiſiéme tranche, on ajoutera au premier chiffre, le nombre 3, ainſi de ſuite, & aux autres tranches, le nombre 4, 5, 6, 7, &c.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Remarque.

50. Il eſt à propos de s'exercer à apprendre cette Table par cœur, on en calcule plus promptement; il faut du moins l'avoir devant ſoi lorſqu'on multiplie, juſqu'à ce qu'elle ſoit devenue familiere.

2°. Tirez une ligne droite ſous les deux nombres.

3°. Enſuite multipliez (à l'aide du Livret) tous les chiffres du Multiplicande par chaque chiffre du Multiplicateur, en obſervant de reculer toujours d'un rang vers la gauche les produits qui réſultent de la multiplication de chaque chiffre du Multiplicateur, afin que les dixaines ſoient placées ſous les dixaines, & les centaines ſous les centaines, &c.

4°. Puis on ajoutera tous ces produits particuliers, & leur ſomme ſera le produit cherché.

Soit donné cet Exemple

	38476
à multiplier par	35
Premier Produit	192380
Second Produit	115428
Produit total	1346660

Vous direz cinq fois 6 font 30, mettez 0, & retenez 3; dites enſuite cinq fois 7 font 35 & 3 que vous avez retenu font 38, poſez 8 & retenez 3; vous continuerez juſqu'au dernier rang de cette maniere, ce qui vous donnera le premier Produit. Vous paſſerez après au ſecond chiffre 3 du Multiplicateur, en diſant: trois fois 6 font 18, on poſera 8, mais en le reculant d'un chiffre, car ce ſont des dixaines; vous multiplierez tous les chiffres du Multiplicande par ce chiffre 3 du Multiplicateur, & vous aurez le ſecond Produit.

Enfin on fera l'addition de ces deux produits, & la ſomme qui en réſultera ſera le Produit total.

Demonſtration.

Il eſt évident que le premier Produit contient autant de fois le Multiplicande, que le premier chif-

ſre du Multiplicateur contient d'unités, ou le Multiplicande eſt répété autant de fois qu'il y a d'unités dans le premier chiffre du Multiplicateur ; c'eſt le même raiſonnement pour le ſecond chiffre du Multiplicateur. Il s'enſuit donc que tout le Multiplicande eſt multiplié par tout le Multiplicateur, ou répété autant de fois qu'il y a d'unités dans tout le Multiplicateur ; ce qui étoit propoſé.

Remarque.

52. Si les nombres donnés ſont accompagnés de zero, comme

	386	4750
à multiplier par	200	300
	77200	1425000

On multipliera les chiffres poſitifs les uns par les autres, & l'on ajoutera au produit tous les zeros ; cette remarque dépend de la progreſſion décimale ; car un chiffre vaut dix fois plus en lui ajoutant un zero, & cent fois plus en mettant après lui deux zeros ; ainſi de ſuite.

On eſt convenu de ce ſigne × pour marquer que deux chiffres ſont multipliés l'un par l'autre ; ainſi 3×4 ſignifie que 3 eſt multiplié par 4. On a inventé cet autre ſigne = pour marquer l'égalité qu'il y a entre deux quantités, ainſi $5 + 3 = 8$, ſignifie que cinq plus trois eſt égal à huit.

Problême VI.

53. Diviſer un nombre donné par un autre.

Regle.

I. Cas. Si le Diviſeur n'a qu'un ſeul caractere.

1°. On fera à côté du Dividende un petit arc.

qu'on traversera d'une ligne droite sous laquelle on placera le Diviseur, puis on verra combien ce Diviseur est contenu de fois dans le premier chiffre du Dividende, & l'on posera le nombre de fois au-dessus de la petite ligne.

2°. On multipliera ce Quotient par le Diviseur, & on ôtera le produit du chiffre du Dividende, & s'il y a quelque reste, on l'écrira au-dessous.

3°. On abaissera à côté de ce reste le chiffre suivant du Dividende, & l'on cherchera de nouveau combien le Diviseur y est contenu de fois, & on l'écrira à la suite du chiffre du Quotient.

Si l'on continue de cette même maniere pour tous les chiffres du Dividende, on aura le Quotient. Cela va s'éclaircir par l'exemple suivant.

Soit donné le Nombre 7854 à diviser par 3.

Dividende 7854 { 2618 *Quotient.* / 3 *Diviseur.*
18
5
24

Dites, en 7 combien de fois 3, on trouve 2; mettez 2 au Quotient; multipliez 2 par 3, on aura 6 qui ôtés de 7 il reste 1; on abaissera le chiffre 8 à côté de 1, ce qui fait 18, puis on recommence en disant: en 18 combien de fois 3, on trouve 6; on mettra 6 au quotient, si l'on multiplie 6 par 3, & qu'on soustraye des chiffres du Dividende, on trouve qu'il ne reste rien; on abaissera le 5 qui est le chiffre suivant, & on dira de même, en 5 combien de fois 3, on trouve 1 qu'on pose au quotient, si l'on multiplie & qu'on soustraye, il restera 2, à côté duquel on abaissera le 4 qui est au Dividende, ce qui fait 24, dans lequel nombre 3 est contenu

8 fois, qu'on met au Quotient, & comme il n'y a plus de chiffres au Dividende, l'on a trouvé tout le Quotient.

Remarque.

54. Si le premier chiffre du Dividende eſt plus petit que le Diviſeur, il faut alors prendre deux chiffres en commençant l'opération.

Démonſtration.

Le tout étant égal à toutes ſes parties priſes enſemble, il eſt clair que dans cette opération on cherche combien de fois le Diviſeur eſt contenu dans les mille, les centaines, les dixaines, &c. & qu'on marque au Quotient cette quantité de fois. On trouve donc néceſſairement ce qu'on vouloit chercher, puiſque l'objet de la Diviſion eſt d'exprimer combien de fois un Nombre eſt contenu dans un autre.

II. Cas. Si le Diviſeur eſt compoſé de pluſieurs chiffres ou caractères.

Regle.

1°. On écrira le Diviſeur comme dans le premier Cas; puis on prendra autant de chiffres au dividende, qu'il y en a dans le Diviſeur.

2°. On cherchera comme dans le premier cas, combien le premier caractere du Diviſeur eſt contenu de fois dans le premier chiffre du Dividende, & on le poſera au Quotient.

3°. On multipliera ce Quotient par tous les chiffres du Diviſeur, & l'on ſouſtraira le produit des chiffres du Dividende, ſi ce produit n'eſt pas trop grand, & on écrira le reſte au-deſſous.

4°. Si la Souſtraction ne peut ſe faire, on di-

minuera ce Quotient d'une unité ou de plusieurs, jusqu'à ce que le produit de ce Quotient par le Diviseur puisse être soustrait des chiffres qu'on a pris pour être le Dividende.

5°. On écrira enfin le reste s'il y en a un, auquel on joindra une nouvelle figure du Dividende qu'on abaissera, & on recommencera toujours la même opération, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la derniere figure du Dividende.

6°. Veut-on examiner si l'on a bien operé, il n'y aura qu'à multiplier tout le Quotient par le Diviseur, on doit avoir un produit égal au Dividende.

Soit l'Exemple proposé.

Division	Preuve
7856 { 245 / 32	245 *Preuve.*
64	32
145	490
128	735
176	7840
160	16 *Reste.*
Reste 16	7856 *Produit total égal au Dividende.*

Prenez d'abord 78, & dites en 7 combien de fois 3, on trouve 2, écrivez 2 au Quotient, puis multipliez 32 par 2, ce qui fait 64 que vous soustrairez de 78, il reste 14; vous abaisserez 5, & dites en 14 combien de fois 3, on trouve 4 que vous poserez au Quotient, ensuite vous multiplierez 32 par 4, & soustrairez le produit 128 de 145, il restera 17 auquel reste on joindra 6, ce qui fait 176; on recommencera pareillement en disant, dans 17 combien de fois 3, on trouve 5; enfin on multipliera 5 par 32, & vous soustrairez le produit 160 de 176, on aura pour reste 16, & l'o-

pération sera finie, c'est-à-dire, que le Quotient 245 exprime combien de fois le Diviseur 32 est contenu dans 7856; si donc on multiplie 245 par 32, & qu'au produit 7840 on ajoute le reste 16, il viendra 7856.

Remarque.

55. On peut remarquer que pour arriver au but qu'on se propose dans la Division, on sépare les chiffres du Dividende en plusieurs membres ou parties, & qu'on cherche combien le Diviseur est contenu dans chacun de ces membres, ce qui facilite la recherche du Quotient. C'est le sens de toutes les Regles, de faire par parties ce qu'on ne peut faire tout d'un coup.

Soit encore l'Exemple suivant.

```
6406402 { 200200
  0     { 32
   64
    02
```

On choisit d'abord 64, & on dit: 3 est dans 6 deux fois, il faut mettre 2 au Quotient, il ne reste rien, on abaisse 0; mais 3 n'est point dans 0, il faut mettre un zero au quotient, afin que le chiffre 2 soit

Remarque.

56. On appercevra la raison pour laquelle on est obligé de mettre un zero, lorsqu'on voit que le Diviseur n'est point dans un des chiffres du Dividende, si l'on se rappelle que chaque chiffre augmente celui qui le précéde de dix fois ; il faut donc augmenter le Quotient de dix fois, ce qui se fait en mettant un zero ; d'où il est aisé de conclure que le nombre des caracteres du Quotient est égal à celui du Dividende, ne comptant que pour un le nombre de ceux qui sont nécessaires pour la premiere opération.

Démonstration.

Elle est la même que celle du premier Cas ; il est vrai que celle-ci, qu'on appelle composée, est sujette au tâtonnement, mais ce tâtonnement se trouve rectifié par la multiplication du Quotient par le Diviseur, lequel produit est comparé aux chiffres qu'on a choisis pour être le Dividende.

DEFINITION VII.

57. Si l'on compare deux Nombres (4 & 12) en cherchant par la Soustraction quelle est leur différence, sçavoir 8, ce rapport est nommé *Rapport Arithmetique* ; mais si l'on cherche combien l'un est contenu dans l'autre, comme 4 est dans 12, c'est-à-dire (3), ce que l'on connoît par la Division ; on nomme cette maniere de considérer les grandeurs *Raison Géometrique*, ou simplement *Rapport* : le premier se connoît donc par la Soustraction, & le second par la Division, & le Quotient est ce qu'on appelle l'*Exposant* de la raison géométrique.

DEFINITION VIII.

58. On dit que deux ou plusieurs rapports arithmétiques sont semblables, comme (3, 5 & 6, 8) lorsque la différence est la même, & que des rapports geometriques sont semblables, lorsque les exposans sont les mêmes, comme (3, 12 & 5, 20) cette similitude de rapports est appellée proportion. La premiere, *Proportion Arithmétique*; la seconde, *Proportion Géométrique.*

Remarque.

59. On écrit ainsi les nombres qui sont en proportion Arithmétique (5. 3 ∵ 8. 6, ou 5 — 3 = 8 — 6) & on écrit de cette maniere ceux qui sont en proportion Géometrique (12. 3 :: 20. 5.) Voici comme on doit prononcer la premiere, 5 surpasse 3 comme 8 surpasse 6, & la seconde, en disant: 12 contient 3 autant de fois que 20 contient 5. Il est encore fort ordinaire de marquer la proportion géométrique de cette maniere $\frac{12}{3} = \frac{20}{5}$, ce qui signifie que douze divisé par trois, est égal à vingt divisé par cinq. Cette petite ligne tirée entre les deux nombres indique la division.

DEFINITION IX.

60. Quelquefois le second terme de la proportion occupe encore la place du troisiéme terme, comme ici 5. 8 ∵ 8. 11, & alors le terme 8 est appellé moyen proportionnel arithmétique; voici comme on marque cette proportion, qu'on nomme proportion continue ∻ 5. 8. 11. Si la proportion est géometrique, on écrit 3. 6 :: 6. 12, ou ∻ 3. 6. 12. & l'on dit que 6 est moyen proportionnel géométrique.

DEFINITION X.

61. Une ſuite de nombres qui ſont en proportion, ſoit Arithmétique, ſoit Géométrique, eſt nommée Progreſſion; ainſi ÷ 3. 6. 9. 12. 15. 18 &c. eſt une Progreſſion Arithmétique, & ∺ 3. 6. 12. 24. 48. 96. eſt une Progreſſion Géométrique.

Axiomes.

62. Deux raiſons égales à une troiſiéme ſont égales entre elles, comme 1. 4 :: 3. 12.

De même 1. 4 :: 5. 20.

Donc 3. 12 :: 5. 20.

Théorême I.

63. Si deux nombres (3 & 6) ſont multipliés par un même nombre comme (4) les produits (12 & 24) ſont en même raiſon que les nombres qui ſont multipliés.

Démonſtration.

Lorſqu'on multiplie 3 par 4, on a 1. 4 :: 3. 12, (§ 17.) & multipliant 6 par 4, on a 1. 4 :: 6. 24; d'où il ſuit (par l'axiome 62.) que 3. 6 :: 12. 24.

Corollaire.

64. Il ſuit de cette Démonſtration que ſi l'on diviſe deux nombres par un même nombre, les quotiens ſont en même raiſon que les grandeurs à diviſer; car il eſt clair que la Diviſion rétablit les grandeurs comme elles étoient avant la Multiplication, mais on peut le démontrer par le principe énoncé à l'article (20.) $12. \frac{12}{4} = 3 :: 4. 1.$

De même $24. \frac{24}{4} = 6 :: 4. 1.$

Donc 12. 24 :: 3. 6.

DEFINITION XI.

65. On nomme *Fraction* une quantité qui eſt partagée en pluſieurs parties, & dont on en prend une ou pluſieurs.

Hypothèſe IV.

66. La Fraction ſe marque par deux nombres mis l'un ſur l'autre avec une petite ligne entre deux, comme $\frac{2}{3}$, le chiffre qui eſt au-deſſous de la ligne indique en combien de parties l'entier eſt partagé, & le chiffre qui eſt au-deſſus indique combien on prend de ces mêmes parties ; ainſi dans cet Exemple on prononcera deux tiers, & dans celui-ci $\frac{3}{4}$, trois quarts, le chiffre ſupérieur s'appelle *Numérateur*, & l'inférieur *Denominateur*.

La fraction eſt une diviſion, dont le dividende eſt plus petit que le diviſeur ; ainſi on peut dire que $\frac{2}{3}$ ſignifie 2 diviſé par 3, comme on l'a remarqué article (59.)

Corollaire I.

67. La Fraction eſt jugée plus ou moins grande par le rapport que le numérateur a au dénominateur, c'eſt-à-dire par le plus ou le moins de parties que le numérateur contient de celles du dénominateur; ainſi la fraction $\frac{3}{37}$ eſt petite, parce que le numérateur 3 ne contient que trois parties de 37 : au contraire la fraction $\frac{2}{5}$ eſt dite grande, parce que 2 numérateur contient deux parties des cinq qui ſont au dénominateur. Si un numérateur eſt autant de fois contenu dans ſon dénominateur, qu'un autre numérateur l'eſt dans ſon dénominateur, comme $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, on dit alors que les deux fractions ſont égales ; les fractions égales forment donc une proportion. Si le numérateur d'une fraction eſt plus grand que ſon

dénominateur comme $\frac{35}{24}$, la fraction est plus grande que l'entier ; elle est ici de $\frac{11}{24}$ plus grande, car $\frac{24}{24}$ égale l'entier.

Corollaire II.

68. Il s'ensuit (§. 63. 64.) que le numérateur & le dénominateur d'une fraction comme $\frac{4}{6}$, multipliés ou divisés par un même nombre, sont de nouvelles fractions égales entre elles ; ainsi $\frac{8}{12}$ est égal à la fraction $\frac{4}{6}$, laquelle a été multipliée par 2, & qui donnera $\frac{2}{3}$, si elle est divisée par 2.

Problême VII.

69. Réduire une fraction donnée comme $\frac{20}{48}$, en une autre fraction qui lui soit égale, & dont les termes soient plus petits que ceux de la donnée.

Regle.

On divisera (§ 53.) le numérateur & le dénominateur de la fraction par un même nombre qui les divise sans reste ; les quotiens qui résulteront de cette division donneront une nouvelle fraction qui sera égale à la proposée par l'article (64.) ; ainsi divisant les deux termes de $\frac{20}{48}$ par 4, on aura la fraction $\frac{5}{12}$ égale à la proposée.

Problême VIII.

70. Réduire plusieurs fractions qui ont une dénomination différente à la même dénomination, & qu'elles soient cependant égales aux fractions proposées.

Regle.

I. Cas. S'il n'y a que deux fractions, on multipliera les deux termes de chaque fraction par le dénominateur de l'autre.

II. Cas. S'il y a plusieurs fractions, on multipliera le numérateur & le dénominateur de chaque fraction par le produit des autres dénominateurs.

Dans l'un & dans l'autre cas les fractions seront égales & réduites à la même dénomination (§ 63).

Soit proposé l'Exemple suivant

I. Cas. $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, on multipliera 2 & 3, termes de de la premiere fraction par 5, ce qui donne $\frac{10}{15}$; puis 4 & 5, termes de la seconde, par 3, ce qui donne $\frac{12}{15}$.

II. Cas. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, on multipliera $\frac{2}{3}$ par 24 produit de 4 par 6, qui sont les dénominateurs des autres fractions, on aura $\frac{48}{72}$, puis $\frac{3}{4}$ par 18 produit des autres dénominateurs; enfin $\frac{5}{6}$ par 12, & l'on aura $\frac{48}{72}$, $\frac{54}{72}$, $\frac{60}{72}$.

Problême IX.

71. Ajouter des fractions.

Regle.

I. Cas. Si les fractions ont les mêmes dénominateurs, il faut ajouter les numérateurs.

II. Cas. Si les fractions proposées ne sont pas réduites à la même dénomination, il faut commencer par les y réduire (§ 70.) puis ajouter seulement les numérateurs pour en faire une seule fraction, & écrire au-dessous le dénominateur commun; par exemple $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ sont égaux à $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$, en les réduisant à la même dénomination; puis ajoutant les numérateurs 10 & 12, on aura $\frac{22}{15}$ égal à $1+\frac{7}{15}$ (§ 67.).

Autre Exemple.

$\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{3}{4} = \frac{48}{72}, \frac{12}{72}, \frac{54}{72}$, leur somme $\frac{114}{72} = 1+\frac{42}{72} = 1+\frac{7}{12}$, parce que $\frac{42}{72}$ peut se réduire à moindres termes par le (§ 69).

Démonſtration.

Les dénominateurs étant les mêmes, les fractions ſont entre elles comme les numérateurs, donc la ſomme de ces derniers ſera la ſomme des fractions.

Problême II.

72. Souſtraire une fraction d'une autre fraction.

Regle.

I. Cas. Si les fractions ont le même dénominateur, on ſouſtraira le plus petit numérateur du plus grand numérateur, on marquera le reſte au-deſſous du dénominateur commun.

Veut-on ôter $\frac{4}{6}$ de $\frac{5}{6}$, il reſte $\frac{1}{6}$.

II. Cas. Si les fractions propoſées n'ont point la même dénomination, il faut les y réduire, & opérer comme dans le premier cas.

Suppoſons que l'on ait $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$, on les réduira à la même dénomination pour avoir $\frac{14}{21}$ & $\frac{9}{21}$, & on dira enſuite 9 de 14 reſte 5, & on écrira $\frac{5}{21}$.

Démonſtration.

C'eſt le même raiſonnement que dans l'Addition.

Remarque.

73. Une fraction eſt diminuée ou eſt partagée en deux, en trois, en quatre parties, en multipliant ſon dénominateur par 2, par 3, par 4, &c. ainſi $\frac{2}{3}$ eſt le double de $\frac{2}{6}$, & le triple de $\frac{2}{9}$, & le quadruple de $\frac{2}{12}$: au contraire une fraction eſt augmentée en augmentant ſon numérateur ; ainſi $\frac{2}{8}$ n'eſt que la moitié de $\frac{4}{8}$, &c.

Problême XI.

74. Multiplier une fraction par une autre fraction.

Régle.

Multipliez les numérateurs par les numérateurs & les dénominateurs par les dénominateurs, le produit sera la multiplication des fractions les unes par les autres.

Par exemple $\frac{2}{3}$ à multiplier par $\frac{5}{6}$, est égal à $\frac{10}{18}$ $= \frac{5}{9}$ (§ 69).

De même $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7} = \frac{30}{84}$ Produit des Numérateurs. Produit des Dénominateurs.

Démonstration.

Lorsqu'on propose une fraction à multiplier par une autre fraction, c'est improprement qu'on nomme cela Multiplication. Le sens de cette opération est de faire une Réduction ou une Division ; c'est donc une idée opposée à celle qu'on a coutume de se former, on a au contraire dessein de trouver une expression plus petite que celle qui est donnée ; ainsi lorsqu'on se propose de multiplier $\frac{3}{7}$ par $\frac{4}{5}$, on cherche les trois septiémes de quatre cinquiémes, c'est-à-dire, à diviser les $\frac{4}{5}$ en septiémes, ce qui se fait en multipliant 5 par 7, ce qui donne $\frac{4}{35}$ lesquels sont réduits en septiémes ; mais comme l'on veut en prendre 3 de ces mêmes parties, il faut multiplier 4 par 3, & l'on aura $\frac{12}{35}$ qui seront les trois septiémes de quatre cinquiémes, c'est cependant ce que l'usage a voulu appeller multiplication, parce que pour arriver au but qu'on se propose, il faut multiplier ; donc en multipliant selon la regle le numérateur par le numérateur & le dénominateur par le dénominateur, on a résolu ce que l'on demandoit.

Remarque premiere.

75. Il n'est pas étonnant que le produit d'une fraction par une autre fraction soit moindre que les

fractions proposées; car, puisque c'est une vraie division, ou une réduction que l'on veut faire, ce n'est point une multiplication ou une augmentation de parties que l'on cherche.

Remarque seconde.

76. On apperçoit clairement qu'ayant une fraction à multiplier par un nombre entier, on doit ne multiplier que le numérateur de la fraction par le nombre entier, comme $\frac{2}{6}$ par 4 ou par 5 = $\frac{8}{6}$ & $\frac{10}{6}$, car on se propose de quadrupler ou de quintupler la fraction, ce qu'on fait en augmentant son numérateur. Il faut multiplier le dénominateur si on veut la diviser comme on l'a démontré dans la remarque (§ 73.)

Problême XII.

77. Diviser une fraction par une autre fraction.

Régle.

Réduisez les deux fractions à la même dénomination (§ 70.) puis on divisera le numérateur de celle qui est regardée comme le dividende, par le numérateur de celle qui est regardée comme le diviseur.

Soit proposé $\frac{3}{4}$ à diviser par $\frac{2}{3}$, on aura par la réduction à même dénomination $\frac{9}{12}$ & $\frac{8}{12}$, il faudra écrire $\frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8}$, ce sera le quotient de $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$.

Démonstration.

On se propose dans la Division de chercher combien une grandeur est contenue dans une autre, à quoi l'on parvient en voyant combien 8 est dans 9, ou en écrivant $\frac{9}{8}$; car les deux fractions ayant la même dénomination, sont divisées par la même grandeur; elles sont donc entr'elles (§ 64.) comme 9 à 8; donc il suffit de diviser 9 par 8, donc $\frac{9}{8}$ est le quotient.

Remarque premiere.

78. On dit que pour diviſer deux fractions, il faut renverſer les termes de la fraction qui ſert de diviſeur; puis multiplier le numérateur par le numérateur de l'autre, & pareillement les dénominateurs; les produits ſeront le quotient.

Dans l'exemple ci-deſſus $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{3}$ on écriroit $\frac{3}{4}$ & $\frac{3}{2}$, puis multipliant ſelon la regle, on aura $\frac{9}{8}$, ce qui donne le même quotient que l'on a trouvé.

Démonſtration de la Remarque.

$\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{3}$ étant réduits à la même dénomination, on aura $\frac{9}{12}$, $\frac{8}{12}$, & en renverſant les termes du diviſeur, on aura $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{8}$, ſi l'on multiplie les numérateurs & les dénominateurs les uns par les autres, on aura $\frac{9}{8}$; car le terme 12 commun au numérateur de l'une & au dénominateur de l'autre fraction, ne doit point entrer en conſidération; puiſqu'il multiplie la même grandeur & qu'il la diviſe; d'où l'on peut déduire que le quotient d'une fraction par une fraction, eſt plus grand qu'aucune des fractions propoſées; car en les ſuppoſant réduites à la même dénomination, comme $\frac{9}{12}$ & $\frac{8}{12}$, il eſt clair que le numérateur de l'une, ſçavoir 8 qui diviſe le numérateur de l'autre, ſçavoir 9, eſt toujours moindre que le dénominateur commun qui eſt 12; donc $\frac{9}{8}$ eſt plus

fraction, ce qui donnera $\frac{9}{8}$, cette Méthode revient donc à celle qui fait renverser les termes du diviseur.

Remarque troisiéme.

80. On trouve fort souvent dans le Calcul, des nombres entiers seuls, ou avec des fractions, à diviser par des grandeurs entieres, jointes pareillement à des fractions.

Comme 11 $\frac{2}{3}$ à diviser par 2 $\frac{3}{4}$.

Regle.

Réduisez l'entier à la même dénomination que celle de la fraction.

Vous aurez de cette maniere deux nouvelles fractions égales aux quantités proposées, & vous ferez la division comme il est dit dans la seconde Remarque.

Soit l'Exemple proposé 11 $\frac{2}{3}$ à diviser par 2 $\frac{3}{4}$.

En multipliant 11 par 3, on aura $\frac{33}{3}$ = 11, auxquels si l'on ajoute $\frac{2}{3}$, on a $\frac{35}{3}$; de même 2 multiplié par 4 = $\frac{8}{4}$, auxquels joignez $\frac{3}{4}$, la somme est égale à $\frac{11}{4}$; on aura donc $\frac{35}{3}$ à diviser par $\frac{11}{4}$ = $\frac{140}{33}$ suivant la regle précédente, & par réduction 4 $\frac{8}{33}$.

DEFINITION XII.

81. Si l'on multiplie un nombre quelconque par lui-même comme 5, en disant: cinq fois cinq font 25, le produit qui en résulte est appellé quarré; ainsi 36 est le quarré de 6, 49 le quarré de 7, & les nombres 5, 6, 7, sont nommés les racines quarrées de 25, 36, 49.

DEFINITION XIII.

82. Des nombres quarrés comme 25, 36, 49, multipliés par les racines quarrées 5, 6, 7, donnent pour nouveaux produits, 125, 216, 343, qu'on appelle nombres cubes, & les nombres 5, 6, 7, sont appellés les racines cubes de ces mêmes nombres.

DEFINITION XIV.

83. Extraire la racine quarrée d'un nombre, c'est trouver un nombre qui multiplié par lui-même produise le nombre proposé. De même on appelle extraire la racine cube d'un nombre, trouver un nombre qui multiplié deux fois par lui-même, produise le nombre proposé.

Remarque.

84. Pour arriver à faire ces deux opérations, il faut sçavoir par mémoire les Quarrés & les Cubes des neuf premiers chiffres qu'on a placés dans cette Table.

Racines.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quarrés.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubes.	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Corollaire I.

est composé de trois caracteres ; donc le quarré de deux chiffres si petits qu'ils puissent être, sera exprimé par trois caracteres.

Corollaire III.

87. Les trois plus petits caracteres qui puissent être, sont 100, & leur quarré, sçavoir 10000, est exprimé par cinq chiffres ; donc le quarré de deux chiffres quelques grands qu'ils soient, comme le quarré de 99, ne contiendra au plus que quatre chiffres, ou ce qui est la même chose, quatre chiffres n'auront pour racines que deux caracteres.

Corollaire IV.

88. Il s'ensuit que si un nombre est composé de trois ou de quatre chiffres, il a nécessairement pour Racines deux chiffres, & qu'un nombre composé de cinq & de six chiffres, n'a que trois chiffres pour sa racine.

Corollaire V.

89. Il suit des Corollaires précédens, qu'en partageant un nombre comme 529, ou 1859, chacun en deux tranches ou sections, de cette maniere 5|29, & 18|59, le nombre des tranches marquera le nombre de racines, puisque trois chiffres ou quatre chiffres n'ont pour racine que deux caracteres, & que ce nombre est partagé en deux tranches.

Ainsi dans 2|63|46, il y a trois tranches, donc il y a trois caracteres à la racine. De même 76|29|48 aura pour racine trois caracteres.

Remarque.

90. On partage les chiffres par tranches de

deux en deux, puiſque deux chiffres ont une racine; mais la derniere tranche ou le dernier rang, peut ne renfermer qu'un chiffre, parce qu'un ſeul chiffre a une racine; c'eſt par cette derniere raiſon que l'on commence à faire le partage des tranches de droite à gauche, puiſque le quarré de la premiere racine eſt toujours contenu dans cette premiere tranche, ſoit qu'elle contienne un ſeul caractere, ſoit qu'elle en contienne deux.

Definition XV.

91. Si l'on multiplie un nombre composé de pluſieurs chiffres, comme 23 par 23, pour avoir le quarré de 23, on appellera le premier chiffre 2, premiere racine, & le ſecond chiffre 3, ſeconde racine; ainſi de ſuite.

Théorême II.

92. Lorſqu'on multiplie un nombre composé de deux caractéres, comme 23 par 23, le produit de la multiplication, ſçavoir 529, renferme le quarré de la premiere racine (2), puis deux fois le produit de cette premiere racine par la ſeconde racine (3), & de plus le quarré de cette ſeconde racine.

Démonſtration.

Lorſqu'on multiplie	23
par	23
On a, premierement	69
Secondement,	46
Enfin, le *Quarré*	529

On dit 3 fois 3 font 9, c'eſt le quarré de la ſe-

conde racine, puis 2 fois 3 font 6, c'eſt le produit de la ſeconde racine par la premiere; on dit derechef 2 fois 3 font 6, ce qui fait un ſecond produit de la premiere racine par la ſeconde; enfin on dit 2 fois 2 font 4, c'eſt le quarré de la premiere racine; donc, &c.

Corollaire.

93. On peut appliquer ce raiſonnement à tous les autres nombres, composés non-ſeulement de deux caracteres, mais de trois, de quatre, &c. où l'on remarquera que quand le nombre eſt compoſé de trois chiffres, le quarré de ces trois chiffres contient le quarré de la premiere racine, plus un produit fait du double de la premiere par la ſeconde, plus le quarré de la ſeconde; plus un ſecond produit fait du double des deux premieres racines par la troiſiéme, plus le quarré de la troiſiéme.

Si le nombre a quatre chiffres pour ſa racine, il arrive que ſon quarré contient tous les produits qui appartiennent à celui qui n'en a que trois, & il contiendra de plus un produit fait du double des trois premieres racines par la quatriéme, & le quarré de cette quatriéme, ainſi de ſuite.

Problême XIII.

94. Extraire la racine quarrée d'un nombre donné.

Regle.

1°. Partagez par tranches les chiffres propoſés de deux en deux, en commençant par la droite, ce qui vous fera connoître le nombre des racines, & faites un petit arc à côté, comme dans la Diviſion.

2°. Cherchez (à l'aide de la Table) la racine

quarrée des chiffres contenus dans la premiere section qui est à gauche ; & vous poserez cette premiere racine à part.

3°. Soustrayez le quarré de cette racine des chiffres de la premiere tranche, & écrivez le reste.

4°. Joignez à ce reste (s'il y en a), les chiffres de la seconde tranche qui doivent servir de dividende.

5°. Doublez la racine que vous avez trouvée, & divisez par le double de cette racine ces mêmes chiffres qui doivent servir de Dividende, & le quotient qui en viendra sera la seconde racine que vous marquerez à côté de la premiere.

6°. Marquez ce qui reste, puis vous abaisserez à côté de ce reste la figure suivante de la même tranche, & ôtez de ces chiffres le quarré de la seconde racine, vous aurez fini l'opération, & vous aurez trouvé la racine quarrée du nombre proposé, s'il ne contient que deux racines.

EXEMPLE.

Soit proposé 6789 dont il faut trouver la racine quarrée.

			Preuve
	67|89	82 *Racines.*	82
Quarré de 8 =	64	16 *double de* 8 *qui est la premiere racine.*	82
	38		164
16 × 2 =	32		656
	69		*Reste*...65
Quarré de 2 =	4		6789
	Reste 65		

Les tranches étant faites, je vois que le nombre proposé a deux racines (*Corol.* 3.) je dis ensuite le

plus grand quarré contenu dans 67 eſt 64, dont la racine eſt 8, je poſe 8 à la racine (par l'*Article* 2 de la *Regle*), je ſouſtrais (*Art.* 3.) le quarré de 8, qui eſt 64, de 67, & il me reſte 3, auquel je joins (*Art.* 4.) le chiffre 8 de la ſeconde tranche, & cela fait 38; je diviſerai (*Art.* 5.) 38 par le double de la racine déja trouvée, qui eſt 16, & le quotient 2 eſt la ſeconde racine; il me reſte 6, à côté duquel j'abaiſſerai 9, & j'ôterai (*Art.* 6.) le quarré 4 de 69, il me reſtera 65, parce que le nombre propoſé n'eſt pas exactement quarré.

Demonſtration.

Par l'opération il eſt aiſé de voir qu'on ôte du nombre quarré tous les produits dont il eſt compoſé, ſçavoir le quarré de la premiere racine, plus un produit fait du double de la premiere par la ſeconde, & le quarré de la ſeconde, donc cette opération fait trouver la racine.

Remarque premiere.

95. Si l'on multiplie cette racine quarrée par elle-même, on aura le nombre propoſé s'il eſt éxactement quarré, & s'il ne l'eſt pas, on ajoutera à ce produit les chiffres qui ſont reſtés.

Remarque ſeconde.

96. Si le nombre a pluſieurs racines, il faut doubler les racines trouvées qui ſerviront de diviſeur, puis ôter le quarré de cette nouvelle racine; c'eſt la formule générale. S'il arrive que quelques-unes des tranches ne donnent point de chiffres poſitifs pour racines, on mettra un zero à la racine, & on paſſera à la tranche ſuivante.

Remarque.

97. On peut voir dans la Table des Cubes, que le cube de 2, de 3, de 9, sont exprimés, le premier par un seul chiffre, sçavoir 8 ; le second, par deux chiffres, sçavoir 27, le troisiéme, par trois chiffres, sçavoir 729.

Corollaire I.

98. Il s'ensuit donc qu'un nombre d'un seul caractere ou de deux, ou de trois, n'a pour racine qu'un seul chiffre, mais au contraire quatre caracteres ont nécessairement deux racines, puisque 1000 est le cube de 10, qui est le nombre qui contient les deux plus petits caracteres possibles.

Corollaire II.

99. En suivant le même raisonnement, on verroit qu'un nombre composé de cinq & de six chiffres a deux racines.

Corollaire III.

100. Un nombre étant proposé pour en extraire la racine, il faudra le partager par tranches de trois en trois, en commençant de gauche à droite, & il y aura autant de racines que de tranches ; il est clair encore que la derniere tranche pourra ne contenir que deux, ou un seul chiffre.

Théorême III.

101. Lorsqu'on multiplie cubiquement un nombre composé de deux caracteres comme 23, le

nombre cube qui est 12167, contient le cube de la premiere racine, plus un produit fait du triple du quarré de cette premiere racine par la seconde, plus un autre produit fait du triple de la premiere racine par le quarré de la seconde, plus le cube de la seconde.

Démonstration.

Soit le nombre 23 multiplié deux fois par lui-même, suivant la Méthode ordinaire.

En multipliant....	23
par....	23
on a d'abord....	69
puis...	46
enfin le *Quarré*...	529
Multipliant ce Quarré *par*...	23
on a d'abord..	1587
puis	1058
Enfin le *Cube*	12167

Le nombre 12167 est donc le Cube de 23.

Mais en suivant l'énoncé du Théorême, prenez

1°. Le cube de 2, qui est......	8
2°. Le triple du quarré de 2, & le multipliez par 3, pour avoir.....	36
3°. Le triple de 2 par le quarré de 3, pour avoir..................	54
4°. Le Cube de 3, pour avoir......	27
	12167

Si l'on ajoute tous ces différens produits, on aura encore le même nombre que ci-dessus qui étoit le cube de 23; donc un nombre cube qui a deux

racines, contient ce qui a été énoncé dans le Théorême. Il faut arranger ces différens produits dans le rang qu'il leur convient pour les ajouter, & avoir le produit total.

Problême XIV.

102. Extraire la Racine cube d'un nombre donné.

Regle.

1°. Partagez par tranches les chiffres de trois en trois, en commençant de droite à gauche, ce qui vous fera connoître le nombre de racines.

2°. Cherchez à l'aide de la Table la racine cube des chiffres contenus dans la premiere tranche, & vous poserez cette premiere racine à part.

3°. Soustrayez le cube de cette racine des chiffres de la premiere tranche.

4°. Abaissez à côté de ce reste (s'il y en a) le premier chiffre de la seconde tranche.

5°. Triplez le quarré de la racine que vous avez trouvé, pour être le diviseur des chiffres abaissés, & le quotient sera la seconde racine que vous poserez à la suite de la premiere.

6°. Vous abaisserez la seconde figure de la tranche à côté de ce qui est resté après cette division, vous en ôterez un produit qui sera fait du triple de la premiere par le quarré de la seconde, & vous

			Preuve.
	328|589	69 *Racines.*	69
Cube de 6 =	216	108 = 36×3 *triple du quarré de la 1re. racine.*	69
	1125		621
108×9 =	972		414
	1538		4761
18×81 =	1458	*triple de la 1re. racine multiplié par le quarré de la seconde.*	69
	809		42849
Cube de 9 =	729		28566
	Reste 80		*Reste*.....80
			328589

Les tranches étant faites, je vois que le nombre proposé a deux racines (*Art.* 1.), je dis ensuite le plus grand cube contenu dans 328 est 216, dont la racine cube est 6 que je pose à la racine (*Art.* 2.) j'ôte 216 de 328, il reste 112 à côté duquel j'abaisse la figure 5, ce qui donne 1125; je divise (*Art.* 3.) 1125 par 108 qui est le triple du quarré de 6, & j'ai au quotient 9 qui est la seconde racine (*Art.* 5.). Je soustrais 9 fois 108, sçavoir 972 de 1125, il reste 153, à côté duquel (*Art.* 6) j'abaisse la figure 8, ce qui donne 1538 dont j'ôte 1458 égal au triple de la premiere racine multiplié par le quarré de la seconde, sçavoir 18×81 = 1458, & il reste 80, à côté duquel j'abaisse 9 qui est le dernier chiffre de la tranche, & j'ôte le cube de 9 sçavoir 729 de 809, le reste est 80, & l'opération est finie, l'on a donc 69 pour racine cube, en sorte que multipliant cubiquement 69, & y ajoutant le reste 80, on aura le nombre proposé.

Démonstration.

On ôte par l'extraction tous les produits qui sont

entrés dans le produit de la puissance, comme il a été démontré au Théorême (101.) donc, &c.

Remarque.

103. Quand il y a plusieurs tranches, on continue en considérant les deux premieres racines, comme si elles n'en faisoient qu'une.

S'il arrive que quelques-unes des tranches ne donnent point des chiffres positifs pour racines, on mettra un zero à la racine, & on passera à la tranche suivante.

Théorême IV.

104. Dans la proportion géometrique le produit du premier terme par le quatriéme, est toujours égal au produit du second par le troisiéme.

Soit l'Exemple suivant $3 . 6 :: 4 . 8$.

On voit que 3×8 produit des extrêmes $= 24$

Et que 6×4 produit des moyens $= 24$

Il en est de même dans tout autre exemple dont les termes sont en proportion géométrique.

Démonstration.

Dans l'Exemple proposé le second terme de la proportion est égal à l'exposant de la raison multiplié par le premier terme, & le quatriéme terme est égal au même exposant multiplié par le troisiéme, c'est-à-dire, $3 .^{\text{étant à}} 6 ::^{\text{comme}} 4 .^{\text{est à}} 8$, on peut dire $3 .^{\text{est à}} 2 \times 3 :: 4 .^{\text{est à}} 2 \times 4$; or on voit qu'en multipliant les extrêmes les uns par les autres, sçavoir $3 \times 2 \times 4$, & les moyens les uns par les autres, sçavoir $2 \times 3 \times 4$, ce sont toujours les mêmes grandeurs qui sont multipliées; donc on doit avoir le même produit.

Si la proportion est ainsi $6 . 3 :: 8 . 4$; on peut la changer de cette maniere, $2 \times 3 . 3 :: 2 \times 4 . 4$, on fera le même raisonnement; donc, &c.

Corollaire I.

105. Si trois nombres ſont en proportion continue, comme ∺ 4, 8, 16, le quarré du moyen terme 8 ſera égal au produit des extrêmes; car on a la proportion 4. 8 :: 8. 16; donc (§. 104.) $8 \times 8 = 4 \times 16 = 64$.

Corollaire II.

106. Le produit de deux nombres comme 2×16 étant égal au produit de deux autres, comme 4×8 ils pourront faire les moyens ou les extrêmes d'une proportion; car ces quatre nombres ainſi rangés formeront une proportion dans laquelle le produit des extrêmes ſera égal au produit des moyens, c'eſt la propoſition inverſe du Théorême IV.

Théorême V.

107. Si quatre nombres ſont en proportion géométrique, ils y ſeront encore quoique l'on dérange les termes des quatre manieres ſuivantes.

Soit la proportion 6. 2 :: 9. 3.

		nommée
1ere. maniere	6. 9 :: 2. 3.	*alternando.*
2e.	2. 6 :: 3. 9.	*invertendo.*
3e.	6 — 2. 2 :: 9 — 3. 3.	*abſtrahendo.*
4e.	6 + 2. 2 :: 9 + 3. 3.	*addendo.*

Démonſtration.

Dans le premier changement les moyens & les extrêmes reſtent les mêmes. Dans le ſecond, les moyens deviennent extrêmes, & dans l'un & dans l'autre cas, ce ſont deux grandeurs dont les produits ſont par l'hypothèſe, égaux aux produits de

deux autres; donc elles sont proportionnelles (106)
Dans le troisiéme & dans le quatriéme, on ajoute, ou soustrait des grandeurs qui sont en même raison; donc les termes sont toujours en proportion (62).

Problême XV.

108. Entre deux nombres donnés (8 & 72.) trouver un moyen proportionnel géométrique.

Regle.

1°. Multipliez les deux nombres donnés l'un par l'autre.

2°. Du produit 576, tirez-en la racine quarrée (§ 94.) on aura 24 qui sera le moyen proportionnel cherché (§ 104.)

Problême XVI.

109. Trois nombres étant donnés (3, 12, 5,) trouver un quatriéme proportionnel.

Regle.

Multipliez le second (12) par le troisiéme (5); & divisez le produit par le premier (3), le quotient sera le quatriéme terme proportionnel.

Deux nombres étant proposés comme 3 & 12, & qu'on veuille trouver un troisiéme proportionnel, faites la proportion 3. 12 :: 12 est au quatriéme terme; vous multiplierez 12 par 12, & vous diviserez le produit par le premier terme (3), vous aurez le troisiéme proportionnel = 48.

Démonstration.

Lorsqu'on cherche un quatriéme proportionnel, on veut trouver un nombre, qui multiplié par le

premier (§ 104.) soit égal au produit du second par le troisiéme ; donc en divisant le produit des moyens par le premier extrême, le quotient sera l'autre extrême ; car le quotient multipliant le diviseur est égal au dividende.

Remarque premiere.

110. On appelle communément cette opération la *Régle de Trois*, parce qu'elle est composée de trois termes ; elle a un usage considérable dans le Commerce & dans les Sciences. Il est à remarquer qu'on ne doit employer cette regle que lorsque les choses exprimées par les nombres sont semblables, & par conséquent peuvent être proportionnelles, ou peuvent être comparées. Supposons, par exemple, que l'eau d'un vase s'écoule par une ouverture, & qu'en une minute il s'en écoule trois pintes, on demande combien il s'en écoulera en 12 minutes ; il est vrai qu'il y a trois termes de donnés dans cette question, sçavoir ($1^{min.}$ $3^{pintes.}$ $12^{min.}$) ; mais les écoulemens de l'eau ne sont pas proportionnels aux tems, puisque l'eau coulera avec plus de vitesse au commencement dans le même tems, qu'elle ne coulera à la fin. Cette question ne peut donc se résoudre par les trois termes proposés.

Remarque seconde.

111. Il n'en est pas de même pour les choses de commerce, elles sont censées être proportionnelles; celui qui est payé double, triple, &c. doit faire le double, le triple d'ouvrage, ainsi de suite : dans de pareilles circonstances, ces sortes d'exemples appartiennent donc à la Régle de Trois, parce que le payement d'un Ouvrier est proportionnel au tems qu'il employe à travailler ; c'est pourquoi si l'on dit :

3 hommes font 12 toises, combien 10 hommes en feront-ils; on écrira $3^{hom.} . 12^{toif.} :: 10^{hom.}$, on multipliera 12 par 10, & l'on divisera le produit 120 par 3, & l'on aura 40 toises.

$$120 \left\{ \frac{40}{3} \right.$$

De même si 7 aulnes d'Anvers font 9 aulnes de Paris, combien 18 aulnes d'Anvers; il faut mettre 7. 9 :: 18, & par la même regle, on trouvera $23 \frac{1}{7}$.

$$162 \left\{ \frac{23 \frac{1}{7}}{7} \right.$$

On peut remarquer que 7 est contenu dans 9, comme 18 est contenu dans 23, plus $\frac{1}{7}$; ce sont-là les cas où les choses exprimées par les nombres sont proportionnelles.

Remarque troisiéme.

112. Si les nombres qui sont proposés pour former la proportion, ont des dénominations ou des sous-especes différentes; ils n'ont point alors la préparation néceſſaire, qui suppose que les termes sont semblables, il faut les réduire à la même dénomination pour employer la Regle de Trois; par exemple $57^{\#} 4^{f.}$ rapportent $2^{\#}$, combien $72^{\#} 9^{f.}$, il faut réduire ces termes en sols, en les multipliant par 20, & l'on aura $1144^{f.} . 40^{f.} :: 1449^{f.} . x.$ est au nombre de sols cherchés.

Il faudroit en user de même pour l'exemple suivant: $35^{toif.} 4^{pié.}$ coutent $152^{\#}$, combien $10^{toif.} 3^{pié.}$, & l'on diroit en multipliant les toises par 6, $214^{pié.} . 152^{\#} :: 63^{pié.} . x.$ est au nombre de livres cherchées.

Remarque

Remarque quatriéme.

113. On parle assez volontiers dans les Livres d'Arithmétique de la Regle de Trois *inverse*, ou *indirecte*, il ne s'agit que d'un arrangement de chiffres; en voici le fondement: dans les regles de proportion que l'on a ci-devant proposées, il est arrivé que l'arrangement des termes de la question a été tel, que ç'a toujours été le quatriéme terme, ou le dernier extrême à trouver : mais on peut proposer quelques questions qui appartiennent aux Régles de proportion, où le terme qu'il faut chercher soit le troisiéme, c'est pourquoi les trois termes qui seront alors donnés seront le premier, le second & le quatriéme; il faudra donc multiplier (§ 104.) le premier par le quatriéme, & diviser le produit par le second, qui est un des moyens.

Soit proposé cet Exemple

12 hommes employent 8 jours à faire un certain ouvrage, combien 16 hommes employeront-ils de tems à faire le même ouvrage.

On rangera de cette maniere les termes semblables à côté l'un de l'autre.

$$12^{\text{hom.}} .\ 16^{\text{hom.}} :: x^{\text{jours}} .\ 8^{\text{jours}}$$

$$12 \times 8 = 96 \left\{ \frac{6}{16} \right.$$

Puis on multipliera 8 par 12, & l'on divisera le produit 96 par 16, & le quotient 6 sera le nombre de jours, ou le terme cherché; on aura donc 12. 16 :: 6. 8.

Démonstration.

Les nombres qui expriment les jours doivent

être entre eux comme le nombre des hommes (58).

Or 12 est à 16, comme 6 est à 8, & le nombre cherché doit être contenu dans son semblable 8 de la même maniere que 12 est contenu dans son semblable 16; c'est pourquoi l'on parviendra à déterminer si le terme cherché doit être *moyen*, ou *extrême*. 1°. Par la comparaison des termes homogenes qu'on mettra à côté l'un de l'autre; 2°. En considerant si celui qu'on veut trouver doit être plus grand ou plus petit que son homogene, ce qui est facile à découvrir par l'état de la question proposée: ces deux choses examinées, on verra toujours si le terme inconnu doit être avant ou après son semblable, c'est-à-dire, s'il doit être moyen ou extrême, en quoi consiste toute la difficulté si c'en est une.

Si l'on avoit rangé ainsi les termes, ce qui peut se faire, à cause du changement *invertendo*, (107.) $16^{hom.}. 12^{hom.} :: 8^{jo.}. x = 6$.

Cette disposition ne change rien à l'état de la question, & il auroit toujours fallu multiplier 12 par 8, & diviser le produit par 16, qui sont les mêmes termes que ceux de l'arrangement précédent, ce qui fait connoître l'inutilité de la Regle de Trois inverse; qu'on peut toujours rendre directe.

Théorême VI.

114. On a dit (§ 63.) que si l'on multiplioit deux nombres par une même quantité, les produits étoient en même raison, ou avoient le même exposant; mais si l'on multiplie deux grandeurs par deux autres, c'est-à-dire l'antecedent d'un des rapports par l'antécédent de l'autre, & le conséquent de l'un par le conséquent de l'autre, les produits qui en résulteront auront entre eux un exposant composé de chacun des rapports.

Soit le rapport de 6 à 2 dont l'exposant est 3
& celui de . . . . . . 36 à 9 dont l'exposant est 4.

les produits . . . . 216 & 18 ont pour exposant 12
qui est égal au produit des exposans des rapports simples.

Demonstration.

Les grandeurs données peuvent s'exprimer ainsi :

$$6 = 3 \times 2, \quad 2$$
$$36 = 9 \times 4, \quad 9$$

Or les multiplicateurs $3 \times 2 \times 9 \times 4 = 216$
& $2 \times 9 = 18$

ont les nombres 2 & 9 communs, donc en les effaçant il restera 3 & 4, exposans des rapports simples dont le produit 12 est égal à l'exposant du rapport composé.

Application du Théorème, au Regle de Trois composée.

115. On suppose que 5 hommes en 15 jours font 300 toises d'ouvrage, on demande combien en feront 18 hommes en 20 jours.

Regle.

1°. Rangez les termes de cette maniere,

$$5^{\text{hom.}} \quad 300^{\text{toises}} \quad 18^{\text{hom.}}$$
$$\text{en } 15^{\text{jours}} \qquad \text{en } 20^{\text{jours}}$$

2°. Multipliez 5 par 15, & 18 par 20 ; puis faites une Regle de Trois formée de ces trois termes

$$75 . 300 :: 360 . x = 1425 + \tfrac{25}{75} = \tfrac{1}{3}.$$

3°. Le quatriéme terme 1425 & $\frac{1}{3}$ qu'on trouve après avoir fait la Regle de Trois, indique le nombre de toises que dix-huit hommes feront en vingt jours.

Démonstration.

Il est clair qu'il faut avoir égard dans cette question au nombre d'hommes & au nombre de jours, c'est-à-dire, qu'on cherche un nombre de toises qui soit à celui qui est donné en raison composée des termes qui expriment les hommes & les jours ; or c'est à quoi l'on parvient en multipliant

5	& 18
par 15	*par* 20

Car 75 & 360 qui sont les produits, sont en raison composée des termes qui ont été donnés (§ 114.), & 300 est à 1425 $\frac{1}{3}$, comme 75 est à 360 ; donc ils sont dans le même rapport ; *ce qu'il falloit trouver.*

Remarque.

116. On peut encore dans ces questions ajouter un plus grand nombre de termes, mais la Regle se résout avec la même facilité, en prenant le rapport composé de tous les termes ; car on cherche toujours un terme qui soit à son homogene en raison composée des grandeurs données. Il faut seulement dans ces questions examiner attentivement quels sont les termes qui doivent former le rapport composé, & quelle place doit occuper le terme cherché.

Seconde Application, ou la Regle conjointe.

117. Cette Remarque donne le moyen de résoudre la Regle qu'on appelle dans l'Arithmétique *Regle conjointe*, & qu'il vaudroit mieux nommer Regle de Trois composée.

On cherche pareillement dans cette Regle à trouver un terme qui soit à un autre en raison composée de plusieurs grandeurs données.

EXEMPLE.

Si 30ᵗᵗ font le prix de 5 cannes de Languedoc.
Si 9 cannes de Langu. = $26\frac{1}{4}$ aulnes de Hollande.
Si 7 aulnes de Hollan. = 4 aulnes de Paris.
Si 5 aulnes de Paris = 6 aulnes de Rouen.
Combien 60ᵗᵗ vaudront-elles d'aulnes de Rouen.

Regle.

Multipliez tous les antécédens les uns par les autres, & les conséquens les uns par les autres, vous aurez 9450 & 3150.

Ces deux produits feront les deux premiers termes de la proportion, & mettez 60ᵗᵗ pour le troisiéme terme; puis achevez la Regle de Trois, en cherchant le quatriéme proportionnel, vous trouverez 20 aulnes de Rouen pour les 60ᵗᵗ.

On rangera donc ainsi les termes

9450. 3150 :: 60ᵗᵗ. $x = 20$ *aulnes de Rouen.*

Et faisant la Regle, on a

$3150 \times 60 = 189000 \left\{ \frac{20 \text{ aulnes de Rouen.}}{9450} \right.$ *divisé par*

Ce n'est comme on voit qu'une Regle de Trois composée; car je cherche un nombre d'aulnes de Rouen qui soit à 60ᵗᵗ en raison composée de tous les nombres qui expriment ces différens prix.

Donc il en faut prendre la raison composée, ce qui se fait par la Multiplication des antécédens d'une part, & des conséquens de l'autre. On a sans doute nommé cette Regle *conjointe*, par la liaison que chaque terme a avec le suivant, puisque ce n'est qu'une suite d'égalités dont le premier terme est toujours du même genre que le second terme de l'égalité précédente.

Lorſqu'on trouve quelque nombre égal de part & d'autre, comme 5 dans l'exemple précédent, on peut l'effacer, & multiplier ſeulement les termes qui reſtent, on aura 1890, & 630 dont on peut encore retrancher le zero, & on aura cette proportion 189. 63 :: 60. x = 20.

Problême XVII.

118. Diviſer un nombre en pluſieurs parties proportionnelles à d'autres qui ſont donnés.

Régle.

1°. Faites une ſomme des grandeurs données, dont vous ferez le premier terme d'une proportion.

2°. Vous placerez pour ſecond terme le nombre à diviſer, & pour troiſiéme terme une des grandeurs propoſées.

3°. Vous ferez autant de Regles de Trois, qu'il y a de grandeurs données.

Suppoſons qu'on veuille partager 60 en trois parties qui ſoient entre elles comme 3, 4, 5, on ajoutera 3
4
5

	ſomme			Quatriémes termes cherchés.		
& on dira	12. 60 :: 3.	15	ou	180	$\frac{15}{12}$
	12. 60 :: 4.	20	ou	240	$\frac{20}{12}$
	12. 60 :: 5.	25	ou	300	$\frac{25}{12}$

C'eſt-à-dire comme la ſomme eſt à la grandeur à diviſer, ainſi chaque quantité eſt au quatriéme terme qu'on trouve en faiſant trois Regles de proportion.

Application, ou Regle de Compagnie simple.

Trois personnes qui se sont associées, ont gagné en commun 60₶, l'une a mis 3₶, l'autre 4₶, & la troisiéme 5₶, on demande combien elles doivent avoir chacunes proportionnellement à leur mise.

Il faut comme ci-dessus, ajouter ensemble toutes les mises dont vous ferez le premier terme de la proportion, le gain sera le second, & chaque mise sera le troisiéme ; puis vous ferez autant de Regles de proportion qu'il y a de mises.

Démonstration.

Les quatriémes termes 15, 20, 25, sont entre eux comme 3, 4, 5 ; car le rapport de 3 à 15 est égal à celui de 12 à 60.

De même le rapport de 4 à 20 = 12 à 60 ; donc (§ 62.) 3 est à 15 :: 4 est à 20, & 15 + 20 + 25 = 60 nombre donné, & qu'il falloit diviser dans les parties proportionnelles.

SECOND EXEMPLE

Pour la Régle de Compagnie simple.

Deux personnes ont mis ensemble 1200₶, l'une a 5000₶ de gain, & l'autre 3000₶, on demande quelle a été la mise de chaque personne ; on voit que leurs mises particulieres doivent être entre elles comme le gain de chacun, ou comme 5000 est à 3000 ; donc il faut dire

	gain total	mise totale		gain particulier		mise particul
comme	8000.	1200	::	5000.	x.	750.
	8000.	1200	::	3000.		450.

C'est-à-dire comme la somme du gain total est à la mise entiere, ainsi chaque gain est à la mise parti-

culiere, qu'on trouvera en faisant les deux Regles de proportion.

Problême XVIII.

119. Diviser une grandeur en plusieurs parties proportionnelles, & qui soient en raison composée d'autres grandeurs données.

Régle.

1°. Prenez la raison composée des grandeurs données (§ 114.)

2°. Faites une somme de ces raisons composées que vous mettrez pour premier terme d'une proportion.

3°. Placez pour second terme la grandeur à diviser.

4°. Faites autant de Regles de proportion qu'il y a de grandeurs données.

Soit proposé 288 qu'il faut partager en deux parties qui soient entre elles en raison composée

de 2 à 5
& de 3 à 6
6 30

La raison composée est 6 & 30, dont la somme est 36. On dira

somme. grandeur à diviser

$$\textit{Comme}\begin{cases} 36.\ 288 :: \ 6.\ x = 48, \text{ou } 1728 \left\{\dfrac{48}{36}\right. \\ 36.\ 288 :: 30.\ x = 240, \text{ou } 8640 \left\{\dfrac{240}{36}\right. \end{cases}$$

Application du Problême, ou Regle de Compagnie composée.

Deux personnes sont convenues qu'en mettant ensemble, l'une 8# pour 2 mois,
l'autre ...... 14# pour 3 mois,

elles partageroient proportionnellement au tems & à la miſe. Elles ont gagné $750^{\#}$, on demande le profit de chacune.

Il faut comme ci-deſſus multiplier 8 & 14
par 2 *par* 3

puis ajoutant 16 & 42 .... *produits* 16 42

$$\text{On dira} \begin{cases} 58.\ 750 :: 16.\ x = 206\ \frac{52}{58} \\ 58.\ 750 :: 42.\ x = 543\ \frac{9}{58} \end{cases}$$

ſomme égale au gain $750^{\#}$.

Démonſtration.

Les quatriémes termes qu'on vient de trouver $206 + \frac{52}{58}$, & $543 + \frac{6}{58}$, ſont entre eux comme 16 & 42 ; or 16 & 42 ſont dans la raiſon compoſée $\begin{smallmatrix}\text{de } 8 \text{ à } 14 \\ \& \text{ de } 2 \text{ à } 3\end{smallmatrix}$, c'eſt-à-dire de la miſe à la miſe, & du tems au tems ; donc, &c.

SECOND EXEMPLE

Pour la Regle de Compagnie compoſée.

On ſuppoſe que trois perſonnes ſe ſont aſſociées pour 12 ans, & qu'elles ont gagné $600^{\#}$.

Le premier a mis $100^{\#}$, & au bout de 6 ans il a retiré $40^{\#}$.

Le ſecond a mis $120^{\#}$, & au bout de 8 ans il a retiré $60^{\#}$.

Le troiſiéme a mis $80^{\#}$, & 4 ans après il a encore mis $60^{\#}$.

On demande ce que chacun doit avoir de profit à raiſon de ſa miſe & de ſon tems.

Or dans cette queſtion l'on cherche à partager 600# en trois parties qui ſoient entre elles en raiſon compoſée des tems & des miſes ; mais quelle eſt cette raiſon compoſée des tems & des miſes ?

Le premier a mis 100# pour 12 ans, mais il n'a laiſſé dans la Caiſſe commune ces 100# que les ſix premieres années après leſquelles il a retiré 40# ; donc il ne met plus que 60# pour les ſix années ſuivantes ; donc multipliant la miſe par chaque tems, on aura pour les 6 prem. années 100# × 6 = 600
& pour les 6 dern. années 60# × 6 = 360

dont la *ſomme* 960

exprimera la miſe & le tems du premier.

De même le ſecond a mis 120 liv. pour 12 ans, mais il ne laiſſe dans la Caiſſe commune ces 120 liv. que pendant 8 ans, après leſquels il a retiré 60 liv. donc il ne met plus que 60 liv. pour les 4 années ſuivantes ; donc multipliant la miſe par chaque tems, on aura pour les 8 prem. années 120# × 8 = 960
& pour les 4 dern. années 60# × 4 = 240

Somme de la miſe & du tems du ſecond 1200

Enfin le troiſiéme a mis 80 liv. pour 12 ans, mais ayant ajouté 60 liv. à cette ſomme quatre ans après, il avoit en Caiſſe pendant 4 ans 80#
mais au bout de ce tems ayant ajouté 60#

il a eu pendant 8 années un fonds de 140#

Multipliant donc chaque miſe par ſon tems, on aura d'une part . . . . 80 × 4 = 320
& de l'autre . . . . 140 × 8 = 1120

leſquels produits étant ajoutés donneront 1440
& ce nombre exprimera la miſe & le tems du

troisiéme Associé. Presentement qu'on a trouvé ces nombres 960

1200

1440

	Sommes des mises & des tems de chacun.	grandeur à diviser.		produit des tems par la mise.
Il faut opérer comme il a été dit, en faisant, comme	3600.	600	::	960. $x = 160$
	3600.	600	::	1200. $x = 200$
	3600.	600	::	1440. $x = 240$

Remarque.

120. Dans toutes les Regles précédentes, & dans celles qui suivent, lorsqu'il arrive que quelques-uns des termes ont des sous-especes, il faut avoir attention de réduire tous ces termes à l'homogenéité, c'est sur cette idée de similitude de rapports qu'est fondée toute cette Théorie. (On a fait la même Remarque à l'article 112).

Regle d'Alliage. Problême XIX.

121. Plusieurs choses de même genre, mais de valeur différentes étant proposées, trouver la quantité qu'il faut de chacune pour composer un nombre de parties qui soient d'une valeur moyenne.

Soient donnés plusieurs lingots d'or,

L'un au titre de 23 Karats, l'autre à 18.

Un troisiéme à 24, & le quatriéme à 15.

On demande la quantité qu'il faut mêler des uns & des autres pour faire de l'or à 20 Karats.

Regle.

1°. Prenez deux à deux la différence de chaque titre à celui qui est moyen, comme de 23 à 20 = 3

celle de .... 18 à 20 = 2

De même prenez la différence de 24 à 20 = 4

celle de .... 15 à 20 = 5

2°. Pour marquer la quantité que doit fournir chaque lingot, donnez au plus haut titre la différence du moindre, & réciproquement, donnez au plus bas titre la différence du plus élevé ; la somme de ces quantités marquera le nombre des parties composantes du titre moyen.

	Divers prix multipliés réciproq. par leur diff.
Multipliez donc	$2 \times 23 = 46$
	$3 \times 18 = 54$
De même	$4 \times 15 = 60$
	$5 \times 24 = 120$
	prix moy.
Leur *somme*	$14 \times 20 = 280$
	Produit, égal aux produits particuliers.

Remarquez que l'on a pris suivant la Regle deux parties de l'or au titre de 23, & trois de celui qui est au titre de 18 ; enfin quatre de celui qui est à 15, & cinq de celui qui est à 24.

Remarquez encore que la somme de toutes ces différences multipliées chacune réciproquement par les divers prix, font un tout 280, qui est égal à cette même somme multipliée par le prix moyen 20.

Démonstration.

Il est clair par l'état de la question que les parties inconnues ou composantes, doivent être entre elles comme leur différence au prix moyen, de maniere que la partie qui en approche le plus, doit fournir davantage pour le mêlange, que celle qui en est plus éloignée.

De plus, les produits partiaux qui viennent de la multiplication de chaque quantité par son titre, doivent faire une somme égale au produit de la somme des différences par le prix moyen, comme on l'a vû par l'opération même, donc, &c.

Remarque premiere.

122. On trouve par cette Méthode un nombre déterminé des parties qu'il faut prendre ſur chaque lingot, pour faire un tout au prix moyen; mais ſi l'on propoſoit un mêlange d'un nombre à volonté, comme 70: il eſt viſible que pour parvenir à cette réſolution, il faut diviſer le nombre propoſé en parties proportionnelles aux différences trouvées, ce qui s'acheveroit par pluſieurs Regles de Trois.

Comme la ſomme des différences.	
	$14 . 70 :: 2 . x = 10$ parties de 23
	$14 . 70 :: 4 . x = 15$ parties de 18
	$14 . 70 :: 5 . x = 20$ parties de 15
	$14 . 70 :: 3 . x = 25$ parties de 24

La Regle conſiſtera donc à dire, comme la ſomme des différences eſt au nombre propoſé, ainſi chaque différence eſt à chaque partie du titre donné.

Si les quantités propoſées étoient en nombre impair, on en répéteroit une deux fois, en prenant pareillement ſa différence au prix moyen, & le reſte s'acheveroit comme ci-deſſus.

Remarque ſeconde.

123. Ce n'eſt qu'improprement qu'on peut appeller une Regle d'Alliage, celle où l'on diroit: je veux mêlanger 4 pintes de vin à 12 ſols, à 6 ſols, à 7 ſols, on demande combien on doit le vendre;

Car $4 \times 12 = 48$
$4 \times 6 = 24$
$4 \times 7 = 28$

Ces douze pintes font 100 ſols, qui diviſés par 12, nombre des pintes, donnent 8 ſols 4 deniers pour chaque pinte.

$$100 \left\{ \frac{8 \text{ f. } 4 \text{ den.}}{12} \right.$$

Il s'enfuit que dans ce cas, il faut ajouter tous les prix propofés, & divifer leur fomme par celle du nombre donné.

Remarque troifiéme.

124. On ne mettra point les Regles d'une & de deux fauffes pofitions qui n'appartiennent point à l'Arithmétique, elles font par leur nature du reffort de l'Analife. Il convient même d'avertir que certaines Regles aufquelles on a donné des noms particuliers, ne font point des Regles d'une efpece ou d'une nature différente de celles qu'on a expliquées dans ce Traité; ce font les diverfes applications qu'on en a faites dans le Commerce qui ont déterminé à leur donner des noms différens; mais ce qui en conftitue l'effence eft le même : on fçait que les ufages de l'Arithmétique font infinis, & que les noms ne changent point les idées des chofes; ainfi toutes les Regles de l'Arithmétique font comprifes dans ce Traité.

FIN DE L'ARITHMETIQUE.



LE CALCUL
DES
PARTIES DECIMALES.

L'ON a trouvé le moyen d'éviter l'embarras des fractions ordinaires, en se servant du Calcul des Parties Décimales, sur lesquelles on opere comme sur les Nombres entiers. Voici les Principes sur lesquels il est appuyé ; on va expliquer les Regles, puis on donnera les usages qui feront connoître l'utilité de ce Calcul.

DEFINITION.

1. Si l'on divise un tout, ou l'unité ; par exemple, une toise, un pied, &c. en 10 parties égales, chacune sera un dixiéme de l'unité ; si l'on divise ce dixiéme en 10 autres parties égales, chacune sera un centiéme d'unité ; enfin ce centiéme étant divisé en 10, donnera des milliémes, ainsi de suite. La subdivision est conçue se faire toujours de dix en dix, suivant la Progression décimale.

Une Partie décimale est une fraction qui a pour numérateur un nombre de caracteres quelconques, & dont le dénominateur est toujours l'unité suivie d'un ou de plusieurs zero.

PREMIER PRINCIPE.

2. On peut marquer ainsi une fraction décimale $\frac{2}{10}$, $\frac{34}{100}$; mais il y a une autre maniere, c'est d'exprimer le numérateur seulement, & de sous-entendre le dénominateur ; par exemple, au lieu d'écrire

$\frac{2}{10}$, $\frac{34}{100}$, on écrit .2 pour $\frac{2}{10}$, & .34 pour $\frac{34}{100}$, en mettant un point avant les nombres. De même, ſi l'on veut exprimer une fraction décimale avec des entiers 13 $\frac{2}{10}$, & 54 $\frac{34}{100}$, on écrira ces fractions de cette maniere 13.2, & 54.34, en ſéparant par un point les entiers des chiffres qui ſont les numérateurs des fractions décimales, & en imaginant pour dénominateur l'unité ſuivie d'autant de zero qu'il y a de caracteres au numérateur.

Il faut donc conclure que lorſqu'on trouvera des nombres écrits de cette maniere 24.356 ; cela ſignifie vingt-quatre entiers, plus trois cens cinquante-ſix milliémes, puiſqu'on auroit pu écrire ainſi 24 $\frac{356}{1000}$.

Si l'on vouloit exprimer un nombre tel que celui-ci 36 $\frac{2}{1000}$, il faudroit écrire 36.002, & non pas 36.2, parce que ces zero qui précedent le chiffre poſitif 2, ſont placés pour indiquer que la fraction exprime des milliémes, ce que l'on n'auroit pas marqué en écrivant ſeulement 36.2 qui ne ſignifie que trente-ſix deux dixiémes, ou 36 $\frac{2}{10}$; de même 28.00003 eſt égal à 28 $\frac{3}{100000}$. Les zero mis avant le 3 ſont néceſſaires pour faire entendre le nombre de zero que l'on doit concevoir au dénominateur, qu'on ne pourroit reconnoître autrement, puiſqu'il eſt ſous-entendu.

Il faut encore ſçavoir que cette maniere d'écrire des décimales 0.23 ſignifie qu'il n'y a point d'entiers, & que cette fraction eſt égale à $\frac{23}{100}$, mais on l'écrit ainſi 0.23 pour conſerver l'uniformité, & diſtinguer le rang des entiers d'avec les fractions décimales ; cette fraction 0.000048 eſt donc égale à $\frac{48}{1000000}$, & 1.003 = 1 $\frac{3}{1000}$.

SECOND

SECOND PRINCIPE.

3. Plusieurs Fractions décimales, comme 0.3; 0.54, & 0.008 signifient, comme on vient de le dire $\frac{3}{10}$, $\frac{54}{100}$, & $\frac{8}{1000}$; or ces fractions pourront toujours être réduites facilement à la même dénomination; car $\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000}$. De même $\frac{54}{100} = \frac{540}{1000}$; donc les fractions proposées 0.3, 0.54, & 0.008 pourront s'écrire ainsi, la premiere 0.300; la seconde 0.540, & la troisiéme 0.008. Si des nombres entiers sont joints aux fractions décimales, comme 42.03, & 8.0004, ils seront réduits à la même dénomination en écrivant 42.0300; & 8.0004; ces changemens sont évidens, puisque les numérateurs & les dénominateurs de chaque fraction sont multipliés par la même grandeur, ils répondent à ce que l'on nomme dans les fractions ordinaires *Réduction à la même dénomination*; cette nouvelle maniere de les exprimer est démontrée par le premier Principe.

Problême I.

4. Additionner des fractions décimales.

Regle.

Si elles sont réduites à la même dénomination.

1°. Rangez les chiffres comme si c'étoit des grandeurs entieres, chacun dans le rang qui leur convient.

2°. Faites l'Addition suivant la Regle des Nombres entiers, & la somme sera l'Addition totale.

Soient proposées les Fractions suivantes

$$
\begin{array}{rl}
42.34 = & 42\frac{34}{100} \\
105.07 = & 105\frac{7}{100} \\
19.03 = & 19\frac{3}{100} \\
0.79 = & 0\frac{79}{100} \\
\hline
167.23 = & 167\frac{23}{100}
\end{array}
$$

On dira donc 9 & 3 font 12 & 7 font 19 & 4 font 23.

Posez 3 & retenez 2.

Ensuite 2 & 7 font 9 & 3 font 12.

Posez 2 & retenez 1.

Passez à l'autre colonne, & dites 1 & 9 font 10 & 5 font 15 & 2 font 17, posez 7 & retenez 1, & achevez le reste comme à l'ordinaire, vous aurez 167.23, qui signifient cent soixante-sept entiers, plus vingt-trois centiémes.

Remarque.

5. Si les Fractions décimales ne sont pas réduites à la même dénomination, il faut en suivant la regle établie dans le second Principe, commencer par les y réduire, avant que de les ajoûter.

Soient proposés les nombres entiers avec les fractions décimales qu'il faut ajouter.

2.07, 5.3, 0.009, & 1.011.

On les réduira à ces expressions qui leur sont égales, en choisissant toujours la plus grande dénomination ou décimale, qui est ici des milliémes.

$$
\begin{array}{rlll}
2.07 = & 2\frac{7}{100} & = & 2.070 \\
5.3 = & 5\frac{3}{10} & = & 5.300 \\
0.009 = & 0\frac{9}{1000} & = & 0.009 \\
1.011 = & 1\frac{11}{1000} & = & 1.011 \\
\hline
 & & & 8.390
\end{array}
$$

Les fractions ainſi préparées, on fera l'Addition en diſant 9 & 1 font 10, je poſe 0 & retiens 1, puis paſſant à la ſeconde colonne, vous direz 1 de retenu & 7 font 8 & 1 font 9; enfin on continuera de la même maniere, & vous trouverez 8.390 pour la ſomme totale.

Démonſtration.

La ſomme que l'on trouve eſt celle que l'on cherche, puiſque ces fractions n'ont point changé de valeur, & qu'elles ont été réduites à la même dénomination, en les multipliant toutes par le même nombre, comme il a été dit (§. 3).

Problême II.

6. Souſtraire des Fractions décimales.

Regle.

1°. Si les Fractions données ſont réduites à la même dénomination, il faut après les avoir rangées les unes ſous les autres, opérer comme dans la Souſtraction des nombres entiers.

2°. Si elles ne ſont pas réduites, commencez par les réduire à la même dénomination, & faites de la même maniere que ſur les nombres entiers.

Soient propoſés 67.001 dont il faut ſouſtraire 6.2, on les réduira à la même dénomination, en écrivant

$$67.001 = 67\tfrac{1}{1000}$$

Enſuite vous ferez la Souſtraction à l'ordinaire, & vous trouverez

$$6.200 = 6\tfrac{200}{1000}$$

$$60.801 = 60\tfrac{801}{1000}$$

Il en eſt de même de tout autre exemple.

La Démonſtration eſt évidente, & ſuit des mêmes principes que celle de l'Addition.

Problême III.

7. Multiplier un nombre décimal par un autre.

Regle.

1°. Multipliez les nombres, suivant les Règles des nombres entiers.

2°. Séparez par un point, (en commençant par la droite du Produit) autant de chiffres qu'il y a de décimales dans le Multiplicande & le Multiplicateur, & la Multiplication sera faite.

Soient proposés les nombres avec les fractions décimales.

34.79
2 .8
———
27 832
69 58
———
97.412 = $97 \frac{412}{1000}$

Après avoir multiplié à l'ordinaire, on a séparé par un point les trois derniers chiffres, parce qu'il y avoit deux décimales au Multiplicande, & une au Multiplicateur, on verra sur les Exemples qui suivent, la même regle observée.

35.32
21.314
———
14128
3532
10596
3532
7064
———
752.81048

3.9
6.23
———
117
78
234
———
24.297

12.37
0.20003
———
3711
0000
0000
0000
2474
———
2.4743711

Si l'on avoit ces deux fractions décimales à multiplier

$$\begin{array}{r} 0.23 \\ 0.8 \\ \hline \text{on aura } 0.184 \end{array}$$

Remarque.

8. Il peut arriver dans certains cas que la Multiplication étant faite, le Produit ne soit pas exprimé par autant de chiffres qu'il y a de décimales dans le Multiplicande & dans le Multiplicateur ; il faut pour lors mettre avant le Produit autant de zero qu'il est nécessaire pour égaler le nombre de décimales du Multiplicande & du Multiplicateur.

EXEMPLES.

$$\begin{array}{r} 3.54 \\ 0.003 \\ \hline 0.01062 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7.2 \\ 0.005 \\ \hline 0.0360 \end{array}$$

Démonstration.

Cette Multiplication ne differe point de la Multiplication des autres fractions dont on multiplie les numérateurs par les numérateurs, & les dénominateurs les uns par les autres ; ici les dénominateurs sont sous-entendus, & par conséquent leur produit ; mais pour connoître l'espece de cette dénomination qui est toujours l'unité suivie d'un certain nombre de zero plus ou moins grand, on sépare du Produit autant de chiffres qu'il y en a au Multiplicande & au Multiplicateur, puisque ce dénominateur contient autant de zero qu'il y a de décimales au Multiplicande & au Multiplicateur, ce qui fait qu'on doit mettre un ou plusieurs zero

avant le Produit lorſqu'il ne contient pas la quantité convenable de décimales. Il eſt aiſé d'appercevoir ce raiſonnement par un Exemple.

Soit une Fraction décimale à multiplier par une autre,

$$\begin{array}{rr} & 0.5 \\ & 0.28 \\ \hline \text{on a} & 40 \\ & 10 \\ \hline \textit{Produit total} & 0.140 = \frac{140}{1000} \end{array}$$

La premiere Fraction décimale eſt égale à $\frac{5}{10}$, & la ſeconde à $\frac{28}{100}$, qui multipliées l'une par l'autre, donnent $\frac{140}{1000} = 0.140$ (par le 1er. Principe), où l'on voit que le dénominateur eſt l'unité ſuivie de trois zero, ou d'un nombre de zero égal à la quantité de chiffres qu'il y a au numérateur, ou qu'il y a de décimales aū Multiplicande & au Multiplicateur; donc cette Fraction pourra être exprimée par le ſeul produit des numérateurs égal à 140, & le dénominateur étant ſous-entendu, il faudra écrire $0.140 = \frac{140}{1000}$.

Si ces Fractions ſont jointes avec des nombres entiers comme

$$4.8 = \frac{48}{10}$$
$$5.23 = \frac{523}{100}$$

c'eſt-à-dire $\frac{25104}{1000}$ pour produit total qui eſt égal à 25.104 (par le premier Principe) ; il faut donc retrancher par un point dans le produit, autant de chiffres qu'il y a de décimales dans le Multiplicande & le Multiplicateur.

Problême IV.

9. Diviſer un nombre décimal par un autre nombre décimal.

Remarque.

10. Le Dividende peut avoir plus de décimales que le Diviſeur, il peut avoir un nombre égal, ou plus petit.

1°. Si les décimales du Dividende ſurpaſſent celles du Diviſeur, il faut opérer comme dans la Diviſion des nombres entiers, & retrancher dans les caractères du Quotient un nombre de chiffres égal à la différence des décimales du Dividende & du Diviſeur.

Soit le nombre 22.34276 à diviſer par 412.

```
22.34276 { 54.23
2060     {  .412
----
 1742
 1648
----
  0947
   824
----
   1236
   1236
----
   0000
```

On voit que le Dividende ayant cinq décimales, & le Diviſeur trois, le Quotient doit en avoir deux.

2°. Si la quantité des décimales du Dividende est égale à celles du Diviseur, faites la Division comme à l'ordinaire, & le Quotient n'aura point de décimales, ou exprimera des entiers.

Soit le nombre 0.408 à diviser par 102.

```
0.408 { 4
  408 { .102
------
  000
```

On trouve qu'il n'y a point de différence entre la quantité des décimales du Diviseur & du Dividende, ainsi ce sont autant d'entiers qui sont marqués au quotient.

3°. S'il arrive qu'il y ait plus de décimales dans le Diviseur que dans le Dividende, il faut alors augmenter les décimales du Dividende, en y ajoutant autant de zero que l'on voudra, faire ensuite la Division, & marquer au Quotient la différence des décimales du Dividende & du Diviseur.

Soit le nombre 94.5 à diviser par 8.430.

```
on écrira pour le Dividende 94.5000 { 11.2
                            84 30   { 8.430
                            -----
                            10 200
```

Soit l'Exemple ſuivant où le Diviſeur n'a point de décimales,

$$\begin{array}{r|l} 2.448 & .102 \\ 48 & 24 \\ \hline 00 & \end{array}$$

Le Quotient aura trois décimales ; car la différence des décimales du Dividende à celles du Diviſeur eſt trois, puiſque le Diviſeur ne contient aucunes décimales.

Démonſtration.

Pour diviſer .092 par 0.4, ou $\frac{92}{1000}$ par $\frac{4}{10}$, on aura par la Regle de la Diviſion des fractions $\frac{920}{4000} = \frac{92}{400} = \frac{23}{100}$ en réduiſant à moindres termes, laquelle fraction doit être exprimée ainſi 0.23 qui ne contient que deux décimales ; or il y en avoit trois au Dividende & une au Diviſeur ; donc le quotient doit avoir la différence des décimales du Dividende à celles du Diviſeur.

Lorſqu'il y a plus de décimales au Diviſeur qu'au Dividende, l'on a dit qu'on pouvoit ajouter au Dividende pluſieurs zero à diſcretion, ce qui ne change point la fraction ; car on a démontré que toute fraction comme $4\frac{23}{100} = 4\frac{230}{1000} = 4\frac{2300}{10000}$ $= 4.2300$, ainſi de ſuite. Où l'on voit qu'on peut ajonter au numérareur tant de zero que l'on voudra.

Remarque premiere.

10. Si l'on ajoute au Dividende un nombre de décimales plus grand que celui du Diviſeur, alors le quotient contiendra des décimales ; ſi au contraire l'on n'ajoute au Dividende qu'un nombre de décimales égal à celui du Diviſeur, le quotient ne contiendra que des entiers.

Remarque ſeconde.

11. Il arrive ſouvent que dans ces Diviſions, il y a des reſtes, il faut alors ajouter à ces reſtes autant de zero que l'on voudra, & l'on continuera la Diviſion ſur ces reſtes qui donneront de nouvelles décimales, & qui approcheront plus près de l'entier.

USAGE DES FRACTIONS DECIMALES.

12. Pour ſe ſervir de l'Arithmétique décimale que l'on vient d'expliquer, il faut ſuppoſer la meſure principale dont il s'agit réduite en dixiémes, centiémes, &c. puis opérer à l'aide de cette ſuppoſition ſur les fractions comme ſur les nombres entiers.

Problême I.

13. **Réduire un nombre entier en fractions décimales.**

Régle.

Mettez au-devant de ce nombre autant de zero que l'eſpece de décimale à laquelle on veut le réduire en contient.

EXEMPLE.

Pour réduire 25 toiſes en centiémes, mettez après 25 deux zero de cette maniere, 25.00, & la réduction ſera faite. Si l'on veut une réduction en milliémes, on mettra 25.000, &c.

Corollaire.

14. Lorſqu'on fait une Diviſion ſur des nombres entiers, & qu'il ſe trouve des reſtes, on continuera la Diviſion ſur ces reſtes en leur ajoutant pluſieurs zero jusqu'à ce que le reſte ſoit inſenſible.

EXEMPLE.

Soit proposé 54 toises à diviser par 7, la Division ne se faisant pas exactement, on écrira

```
54.000 { 7.714
49     { 7
 50
  10
   30
    2
```

Et on trouve à la maniere ordinaire le quotient 7 entiers $+ \frac{714}{1000}$. Par cette Méthode on évalue les restes en des parties si petites que l'on veut, de maniere que les nouveaux restes peuvent être négligés sans aucune erreur sensible.

Démonstration.

La Démonstration est évidente, puisque le nombre proposé, ou le Dividende étant réduit par la Multiplication en décimales, comme ici en milliémes, le quotient doit être aussi divisé par la même décimale, c'est-à-dire par des milliémes.

Corollaire.

15. Il s'ensuit que pour diviser sans fraction un moindre nombre par un plus grand, il ne faut qu'ajouter des zero devant le plus petit, & faire la Division comme à l'ordinaire.

EXEMPLE.

Pour diviser 3 par 5, ou $\frac{3}{5}$, on écrira

```
3.00 { 60
00   { 5
```

$= \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$.

On peut mettre autant de zero que l'on voudra, & on retranchera par un point au quotient autant de caracteres que l'on a ajouté de zero.

Soit encore $\frac{2}{3}$ à réduire en décimales, on écrira

$$2{,}00 \left\{ \frac{66}{3} \right. = \frac{66}{100},$$
$$20$$
$$2$$

le quotient est 66, & continuant la Division, on trouve un reste ; & quelque quantité de zero que l'on ajoutât, on n'arriveroit point à un quotient exact, mais il differeroit peu, ce qui fait que par ce moyen on évalue une fraction à des centiémes, milliémes, &c.

Démonstration.

La Démonstration est la même que celle du Problême précédent (§ 9.)

Problême II.

16. Réduire un nombre de différentes especes qui ne sont point des décimales à une seule fraction décimale.

Soit 25^{toises}, 3^{pieds}, $9^{\text{pouces.}}$ à réduire en décimales.

Je dis premierement $3^{\text{pieds}} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10}$;

Ensuite $9^{\text{pouc.}} = \frac{9}{72} = 9000 \left\{ \frac{125}{72} \right.$
$$180$$
$$360$$

le quotient est $0{,}125 = \frac{125}{1000}$; on aura donc $25^{\text{toif.}}$ $\frac{5}{10}$. $\frac{125}{1000}$, lesquelles fractions étant ajoutées, donnent $25^{\text{toif.}}$ $\frac{625}{1000}$. Toute cette préparation se déduit des opérations qui ont été enseignées (§ 5. & 13.)

Problême III.

17. Ajouter & soustraire des fractions par le moyen des décimales.

Régle.

Changez les fractions en décimales, & faites l'Addition ou la Soustraction comme sur les nombres entiers.

Soit $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, qu'il faut ajouter, on aura (par l'Article 14) .... $\frac{2}{3}$ = 0.66
par le même .... $\frac{3}{4}$ = 0.75

dont la somme est égale à 1.41

Soit $\frac{3}{4}$ dont on veut soustraire $\frac{2}{3}$, les fractions étant changées en décimales, on aura 0.75
& 0.66

dont la différence est .... .09 = $\frac{09}{100}$

Problême IV.

18. Multiplier & diviser des Fractions par le moyen des décimales.

Régle pour la Multiplication.

On changera les Fractions en décimales, & l'on fera la Multiplication comme si c'étoit des nombres entiers.

Soit $\frac{5}{6}$ à multiplier par $\frac{3}{4}$; on multipliera les numérateurs par 100, ou par 1000, puis on divisera (§ 13) les produits par les dénominateurs pour changer ces fractions en décimales, & on aura
0.833 pour la premiere,
& 0.750 pour la seconde,

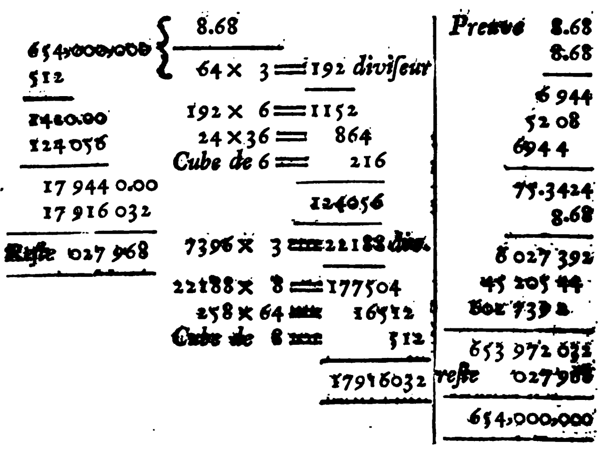
en multipliant, on a 41650
& 5831

Produit total 0.624750 = $\frac{624750}{1000000}$.

2°. Faites l'opération comme sur les nombres entiers.

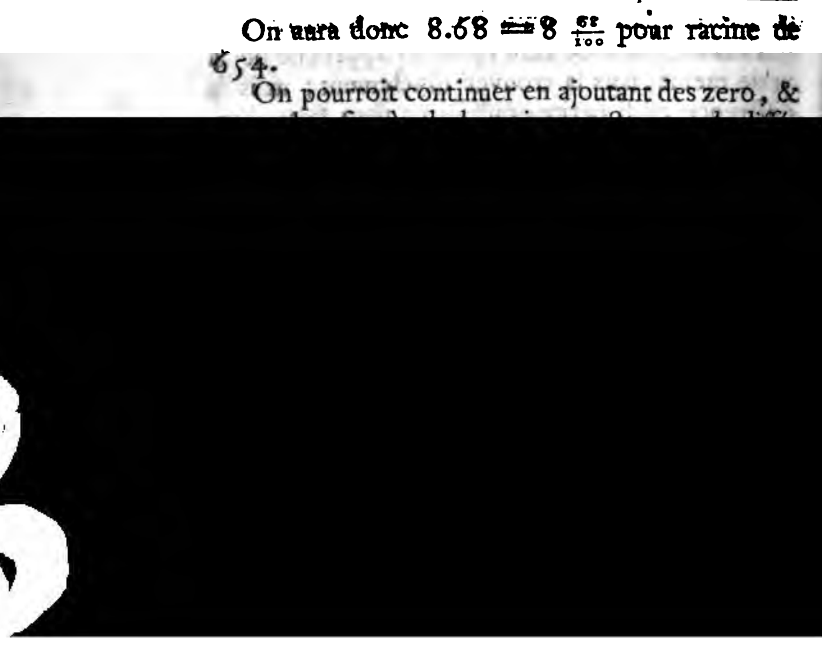
3°. Retranchez de la racine par un point un nombre de caracteres égal au tiers du nombre des zero par lesquels vous avez multiplié le nombre donné.

Soit proposé 654 dont on veut extraire la racine cube par approximation, on multipliera ce nombre par 1000 cube de 10, ou par 1000000 cube de 100.



On aura donc 8.68 = 8 $\frac{68}{100}$ pour racine de 654.

On pourroit continuer en ajoutant des zero, &



ou par le quarré de 100 qui eſt 10000 ; donc en extrayant la racine, elle ne contiendra que des dixiémes ou des centiémes, c'eſt-à-dire qu'il faudra retrancher à la racine un nombre de caracteres égal à la moitié du nombre des zero que l'on a ajouté au nombre propoſé. Il n'eſt pas difficile d'appliquer ce raiſonnement à la racine cube, car le cube de 10 eſt 1000 ; donc, &c.

REMARQUE GENERALE pour les Décimales.

On retranche aſſez communément quelques chiffres d'une fraction décimale, vû l'erreur inſenſible qui en réſulte lorſqu'elle eſt réduite en un grand nombre de petites parties ; ſi l'on avoit par exemple 0.5879, on peut retrancher le dernier chiffre ; mais alors il vaut mieux écrire 0.588, que 0.587, car ce milliéme que j'ajoute, & qui vaut dix dix-milliémes, approche plus d'égaler les neuf dix-milliémes que j'ai retranchés ; donc 0. $\frac{588}{1000}$ eſt égal à $\frac{5879}{10000}$ à $\frac{1}{10000}$ près.

De même, ſi l'on avoit 28.79, & qu'on voulût négliger la décimale, on prendroit 29 aulieu de 28, parce que 29 approche plus d'égaler 28.79, que 28 ſimplement ; on a coutume d'agir ainſi toutes les fois que le chiffre qu'on retranche ſurpaſſe 5, il eſt aiſé d'en voir la raiſon ; au contraire ſi j'avois eu la fraction 8.463, & que j'euſſe retranché la derniere figure 3, je me ſerois contenté d'écrire 8.46, parce que la derniere figure eſt moindre que 5.

Quant à l'évaluation d'une fraction décimale, on fait la Multiplication du numerateur de la grandeur décimale par le nombre auquel on veut la réduire, l'on diviſe enſuite le produit par le dénominateur, &

le quotient eſt le nombre cherché ; c'eſt la même méthode que dans les autres fractions.

Par exemple, pour évaluer la partie décimale d'une toiſe 0.55556 en pieds & en pouc. on multipliera par 6 nombre des pieds que contient la toiſe,
& le produit 333336
diviſé par 100000
dénominateur, donnera 3.33336
au quotient, d'où l'on peut remarquer qu'en retranchant du produit autant de caracteres qu'il y en a dans la décimale propoſée, l'excès ſera des entiers ; ſi vous multipliez encore la nouvelle fraction

33336
par . . . . . 12 pouces.

on aura au produit . . . . 400032, & cherchant le quotient on aura la fraction évaluée qui ſera égale à 3 pieds 4 pouces $\frac{32}{100000}$ = 0.55556.

AUTRE EXEMPLE
pour une partie décimale de la livre.

Soit donné pour évaluer en ſols, 0.625
multipliez par . . . . 20 ſols

on aura . . . . 12 ſols. & 500 qui
multipliés par . . . . 12 deniers.

donneront 6.000
ce qui fait 12 ſols 6 den. = 0.625 me. de la livre.





CALCUL LITTERAL.

DEFINITION PREMIERE.

1. L'ALGÉBRE est la Science des grandeurs en général.

On fait avec le ſecours de l'Algébre les mêmes opérations qu'avec l'Arithmétique ; mais c'eſt principalement pour des queſtions ou Problêmes particuliers qu'on a inventé l'Algébre, dont on n'apperçoit l'utilité que dans ce qu'on appelle *Equations*, & dans les differentes parties des Mathematiques.

Remarque premiere.

2. S'il faut trouver, par exemple, deux nombres dont le produit ſoit égal à 60, & la ſomme égale à 17, on devine en tâtonnant que 5 & 12 ſatisfont à la queſtion ; car leur ſomme eſt 17 & leur produit 60 : mais l'Algébre donne des regles pour réſoudre ces ſortes de Problêmes d'une maniere générale, & qui par conſéquent convient à tous les cas. Les diverſes queſtions qu'on peut faire ſur l'uſage de l'Algbére ſont inutiles ; c'eſt en l'étudiant

qu'on appercevra l'utilité & la fécondité de cette Science.

Remarque ſeconde.

3. Quelques-uns ont appellé l'Algébre, l'*Arithmétique ſpécieuſe*, parce qu'elle employe dans les différentes opérations du Calcul, des ſignes généraux, au lieu que l'Arithmétique ordinaire ne conſidere que des grandeurs particulieres. Toutes les fois que nous penſons, nous avons des idées générales ou particulieres, les unes ne peuvent être exprimées que par l'Algébre, & les autres par l'Arithmétique.

DEFINITION II.

4. On donne le nom de *Quantité* à tout ce que l'eſprit conçoit pouvoir être augmenté ou diminué.

Hypothèſe I.

5. On eſt convenu de ſe ſervir des Lettres de l'Alphabet pour faire les opérations d'Algébre, & d'employer les premieres lettres *a*, *b*, *c*, *d*, &c. pour repreſenter les quantités connues ; on a fait choix au contraire des dernieres lettres *x*, *y*, *z*, pour ſignifier les grandeurs inconnues. Cette diſtinction étoit néceſſaire, puiſque dans toute queſtion il y a du connu, & de l'inconnu.

Hypothèse II.

7. Il y a des ſignes dont on eſt convenu, comme celui-ci $+$ qui ſignifie *plus*, & cet autre $-$ qui ſignifie *moins*: il y en a encore deux autres, ſçavoir $>$, & $<$, le premier veut dire *plus grand*, & le ſecond *plus petit*.

Remarque.

8. Le ſigne $+$ ſera d'uſage dans l'Addition, & le ſigne $-$ dans la Souſtraction; ainſi pour marquer l'Addition de a avec b, on écrira $a+b$, & pour ſouſtraire b de a, on écrit $a-b$; de ſorte que ſi la valeur de a eſt 5, ſi celle de b eſt 3, cette expreſſion $a+b$, ou $5+3$ ſignifie 8, & celle-ci $a-b$, ou $5-3$ ſignifie 2. De même $a>b$ ſignifie que a eſt plus grand que b. Toute grandeur qui n'eſt précédée d'aucun ſigne eſt regardée comme poſitive; a, ou $+a$, c'eſt la même choſe. Il eſt inutile d'expliquer pourquoi l'on a choiſi ces manieres de s'exprimer, on le verra dans les Problêmes particuliers.

DEFINITION III.

9. Comme il eſt naturel de marquer les mêmes choſes par les mêmes lettres, on appelle grandeurs ſemblables a & a, de même b & b; au contraire c & d ſeront des grandeurs diſſemblables.

Hypothèse III.

10. Lorſqu'il s'agit de multiplier, on ſe ſert quelquefois de ce ſigne $\times$; c'eſt pourquoi cette maniere de marquer les grandeurs $a\times b$ ſignifie que a eſt multiplié par b; mais en ce cas on regarde la multiplication plutôt indiquée que faite, & lorſqu'on

veut la faire effectivement, on écrit ab, c'est-à-dire qu'on joint les grandeurs à côté l'une de l'autre.

Remarque.

11. Il arrive souvent qu'ayant plusieurs grandeurs de suite dont on veut indiquer la multiplication des unes par les autres, on les écrit ainsi: $\overline{a+b+c}\times d$. Cette maniere d'arranger les lettres, signifie que toutes les grandeurs $a+b+c$ sont multipliées par d. On les marque encore de cette sorte $(a+b+c)\times d$.

Hypothèse IV.

12. La maniere dont on est convenu pour marquer qu'une quantité representée par a est divisée par une autre representée par b s'exprime ainsi $\frac{a}{b}$. De même, s'il y a plusieurs grandeurs, comme $a+b+c$ divisées par $d+f$, on écrira $\frac{a+b+c}{d+f}$. Ces manieres de marquer les diverses opérations, ont une utilité qui ne peut se sentir que par la suite.

Remarque premiere.

13. Lorsque deux quantités sont égales, comme a & b, on les marque ainsi $a=b$. Des grandeurs sont nommées *complexes*, lorsqu'elles sont jointes par le signe $+$ ou $-$, par exemple $a+b$, ou $c-d+f$, sont dites *grandeurs complexes*.

Remarque seconde.

14. On a distingué les grandeurs en positives & en négatives. On appelle grandeurs *positives* celles qui sont précédées du signe $+$, comme $+a$, $+b$; & grandeurs *négatives* celles qui sont précédées du signe $-$, comme $-a$, $-b$. Cependant ces grandeurs négatives sont aussi réelles que les positives;

ainsi $-a$, & $+a$ sont deux grandeurs égales, mais dans un sens opposé, ce qui fait que cette distinction n'est pas arbitraire, mais réelle. Imaginons, par exemple, deux Voyageurs qui partant du même point font chacun 6 lieuës, l'un à l'Orient, & l'autre à l'Occident; si je dirige mon intention du côté de l'Orient, celui qui a suivi cette route aura fait $+6$ lieuës, tandis que l'autre qui va du côté de l'Occident, c'est-à-dire du côté opposé en aura fait -6. Les distances parcouruës sont égales entre-elles, mais prises dans un sens dont les signes $+$ & $-$ marquent l'opposition.

Corollaire.

15. Il faut conclure de cette Remarque, que si deux grandeurs semblables se rencontrent ensemble, & que l'une soit positive & l'autre négative, elles se détruiront mutuellement, à cause de cette opposition; ainsi $+a-a=0$.

Hypothèse V.

16. Lorsqu'il y a quelques nombres qui accompagnent les grandeurs algébriques comme $2a$, $3b$, &c. ces nombres sont appellés *Coefficiens*, & conservent leur valeur numérique, ainsi $2a$ signifie le double de a, & $3b$ le triple de b. Voilà les notions générales dont on a besoin pour commencer les opérations qui vont suivre.

Problême I.

17. Réduire des quantités algébriques à la plus simple expression.

Régle.

1°. Ecrivez les quantités semblables les unes sous les autres.

2°. Puis si ces quantités semblables ont le même signe, ajoutez-les en mettant ce même signe; si au contraire elles ne l'ont pas, écrivez la différence, en lui donnant le signe de la quantité qui est la plus grande.

Soit donné $3a + 5b$, & $2a - 3b$ à réduire à la plus simple expression. On rangera les grandeurs de cette maniere

$$\begin{array}{r} 3a + 5b \\ \underline{2a - 3b} \\ \textit{Réduction}\quad 5a + 2b \end{array}$$

On dira $3a + 2a$ égalent $5a$, de même $5b - 3b$ égalent $2b$; on écrira donc pour la réduction $5a + 2b$.

On doit appercevoir qu'il n'y a de réduction à faire sur les grandeurs algébriques, que lorsqu'il y a des quantités semblables; on se propose par ce Problême de simplifier les grandeurs.

Démonstration.

La Démonstration est évidente; car par cette opération on ne fait que retrancher les choses qui sont opposées, & ajouter les choses semblables; donc.

Problême II.

18. Ajouter des grandeurs algébriques.

Regle.

Ecrivez les grandeurs semblables les unes sous les autres, s'il y en a, & faites la réduction.

S'il n'y a point de grandeurs semblables, écrivez les quantités de suite, en donnant à chacune les signes dont elles sont accompagnées.

Soit donné $3a - 2b + 6c + 2d$

& $a + 2b - 3c - 3d$

la somme totale est $4a \quad 0 + 3c - d$

On a fait l'opération en prenant la somme des grandeurs ou leur différence, parce qu'il y avoit des quantités semblables, & d'autres qui se sont détruites, à cause des signes opposés.

AUTRE EXEMPLE.

Soit proposé d'ajouter les grandeurs suivantes

$4a + 5b - 3d$

$6c - 3f + 2g$

Somme totale $4a + 5b - 3d + 6c - 3f + 2g$

Regle.

Dans cet Exemple il faut écrire, comme on l'a dit, les grandeurs l'une après l'autre, chacune avec son signe & l'Addition est faite.

Démonstration.

Ajouter, c'est *joindre des grandeurs ensemble*, à quoi l'on parvient en réunissant avec leurs signes, les quantités semblables en un tout, ce que l'on fait par l'opération.

Problême III.

19. Soustraire des quantités algébriques, soit qu'elles ayent le même signe, soit qu'elles ne l'ayent point.

Régle.

1°. Ecrivez les grandeurs semblables, s'il y en a, les unes sous les autres.

2°. Changez les signes des quantités qui soustrayent.
3°. Faites la réduction, & la Soustraction sera faite.

Soit donné	$8a - 5c + 9d$
dont on veut ôter	$6a - 8c - 7d$
Reste ou Différence	$2a + 3c + 16d$

En changeant les signes de la grandeur qui soustrait, on aura $-6a + 8c + 7d$, puis faisant la réduction de ces termes avec ceux de $8a - 5c + 9d$, on a la différence $2a + 3c + 16d$.

Démonstration.

Soustraire, est *prendre la différence de deux grandeurs*; or pour trouver cette différence, il faut changer le positif en négatif, & le négatif en positif, puisque l'un est contraire à l'autre, & faire la réduction, ce que l'on a fait. Dans l'Arithmétique, on change seulement le positif en négatif, mais c'est que dans l'Arithmétique il n'y a que des grandeurs positives; au contraire dans l'Algébre il y a des grandeurs négatives & positives, donc il faut changer l'un & l'autre signe pour faire la Soustraction.

Remarque.

20. Il est à remarquer qu'on ne peut soustraire le négatif qu'en le rendant positif, ainsi quand on soustrait une grandeur négative de quelque quantité, on lui ajoute réellement cette même valeur; c'est pourquoi soustraire une grandeur négative, est comme si l'on vouloit soustraire les dettes de quelqu'un; pour y parvenir il faudroit les payer; par conséquent on augmenteroit son bien de cette quantité: mais l'idée qui est présentée dans la Démonstration est la vraie & la meilleure de toutes.

AUTRE EXEMPLE.

$$\begin{array}{rl} & 3a + 2b - 4d \\ & 6c + 4f - 3g \\ \hline \text{Reste ou Diff.} & 3a + 2b - 4d - 6c - 4f + 3g \end{array}$$

Regle.

Changez pareillement les signes de la grandeur qui soustrait, puis écrivez de suite toutes les quantités comme on le voit, & la Soustraction sera faite.

Remarque.

21. Il n'y a point dans cet Exemple, comme dans le premier, de réduction à faire, parce qu'il n'y a point de grandeurs semblables; donc suivant la regle, il faut changer les signes de la grandeur qui soustrait, & les écrire de suite.

Problême IV.

22. Multiplier des quantités algébriques les unes par les autres, soit qu'elles ayent le même signe, soit qu'elles ne l'ayent pas.

Régle.

1°. Multipliez toutes les quantités du Multiplicande par chaque quantité du Multiplicateur, ce qui se fait en joignant les grandeurs à côté l'une de l'autre, suivant la convention (§ 10.)

2°. De plus, comme il faut marquer le rapport qu'ont ces grandeurs les unes aux autres, il faut avoir égard aux signes; observez donc que le signe + multipliant le signe + sera + au Produit; que le signe + multipliant le signe —, donnera le signe — au produit; & que le signe — multipliant le signe —, donnera + au produit.

3°. Faites la réduction, s'il y a des grandeurs semblables, & vous aurez le produit total.

EXEMPLE.

Soit..........	$a + b - d$
à multiplier par...	$a - b - d$
1er. produit par *a*.	$aa + ab - ad$
2e. produit par $-b$.	$-ab \quad - bb + bd$
3e. produit par $-d$.	$-ad \quad - bd + dd$
Produit total......	$aa \quad 0 - 2ad - bb \quad 0 + dd$

On voit dans cet Exemple que la réduction des termes, a produit l'évanouissement de certaines grandeurs, & la somme de quelques autres.

AUTRE EXEMPLE.

Soit................	$3a - 2b$
à multiplier par.......	$5c + 8d$
On aura..............	$15ac - 10bc$
&..................	$+ 24ad - 16bd$
Produit total........	$15ac - 10bc + 24ad - 16bd$

Regle.

1°. Multipliez les Coefficiens les uns par les autres, ainsi que dans la Multiplication des Nombres.

2°. Multipliez les grandeurs algébriques comme à l'ordinaire. On dira donc $3a$ multiplié par $5c$ donne $15ac$, & le reste comme on le voit.

Démonstration.

Il est évident qu'on doit multiplier toutes les quantités du Multiplicande par chaque quantité du Multiplicateur, pour avoir le Produit total; puis suivre la convention qui a été établie pour la Multiplication (§ 10.); c'est ce qu'on a fait dans l'opération.

Démonstration pour les Signes.

La Multiplication est *une Addition ou une Soustraction réitérée de la même quantité*; d'où il suit que le signe + multipliant le signe + donne pour produit +, parce que la Multiplication est alors l'Addition réitérée d'une grandeur positive, qui ne peut produire que +.

De même — multipliant le signe — produira le signe +, parce qu'alors c'est une Soustraction réitérée d'une grandeur négative; or, pour soustraire une quantité qui a le signe —, il faut mettre le signe + (§ 19.), si donc on soustrait — *3* une fois, il faut écrire + *3*, & pour le soustraire encore une fois, c'est-à-dire deux fois, on écrira + *6*.

Donc pour multiplier — *3* par — 2, on aura $+3+3=6$.

Donc $-b \times -c = +bc$; car il faut soustraire — *b* le nombre de fois qu'il est marqué par *c*, puisqu'enfin la Multiplication est la répétition d'une quantité quelconque, soit par Addition, soit par Soustraction. Cette Définition ne peut convenir aux grandeurs numériques, parce que toutes les grandeurs sont positives dans l'Arithmétique.

Quant aux autres signes + multipliant —, le produit doit avoir le signe —, parce que *plus moins* indique plusieurs fois *moins*, ou une répétition de la négation; donc le produit doit avoir le signe —.

Au contraire *moins plus*, ou — multipliant +, indique l'opposition du *plus*, ou la négation du *plus*, donc le produit doit avoir le signe —; ainsi dans l'un & l'autre cas + par —, & — par +, donne toujours le même signe —; ce qu'il falloit démontrer. Ceci est déduit de l'idée même des signes & de celle de la Multiplication.

Problême V.

23. Divifer une grandeur littérale par une autre.

Régle.

1°. Ecrivez les grandeurs du Dividende, & à côté celles du Divifeur; mais qu'elles foient féparées par un petit arc, comme dans la Divifion des Nombres.

2°. Effacez les grandeurs communes au Dividende & au Divifeur, & mettez au Quotient celles qui ne le font pas, en obfervant la même Régle des fignes que dans la Multiplication.

3°. Multipliez le Quotient par le Divifeur, & ôtez le produit des grandeurs femblables.

4°. Puis, s'il refte des grandeurs communes au Dividende & au Divifeur, recommencez la même opération fur les grandeurs fuivantes du Dividende; s'il n'y en a point, écrivez à part le refte & le Divifeur au-deffous.

EXEMPLE.

Soit le Dividende

	$aaa - 3aab + 3abb - bbb$	$aa - 2ab + bb$	Quot.
1er prod.	$-aaa + aab$	$a - b$	Divifeur.
1er refte.	$o - 2aab + 3abb - bbb$ à redivifer.		
2e. prod.	$+2aab - 2abb$		
2e. refte.	$o + abb - bbb$		
3e. prod.	$- abb + bbb$ à redivifer.		
Refte	$o \quad o$		

On dira aaa divifé par a donne aa au Quotient qui multiplié par tout le Divifeur $a - b$, donne $+aaa - aab$ qu'il faut fouftraire du Dividende en changeant les fignes de ce produit, après quoi il reftera $-2aab + 3abb - bbb$.

On recommencera la Division sur ce premier reste en disant $-2aab$ divisé par a, donne au Quotient $-2ab$ qui multiplié par le Diviseur, donne le second produit $-2aab+2abb$, lequel étant soustrait, on a pour second reste $+abb-bbb$.

On continuera la Division sur ce second reste, en disant $+abb$ divisé par a donne $+bb$; puis on multipliera & on soustraira le troisiéme produit des termes du Dividende, & l'opération sera finie.

Démonstration.

Il est clair qu'il faut effacer les grandeurs communes au Dividende & au Diviseur pour faire la Division, puisqu'une quantité qui divise & qui multiplie une grandeur, ne lui procure aucun changement. De plus, on est convenu dans la Multiplication, de joindre les grandeurs (§ 10.), donc il faut les effacer dans la Division, laquelle est une opération contraire à la Multiplication.

En second lieu, il faut multiplier le Quotient par tous les termes du Diviseur, pour faire la Soustraction du Dividende, afin de voir quel est le reste.

Voici quelques autres Exemples pour s'exercer.

Soit le Dividende

	$aa \quad -bb$	$a+b$ Quotient.
1er produit	$-aa+ab$	$a-b$ Diviseur.
1er reste	$0+ab-bb$	
2e. produit	$-ab+bb$	
	Reste $0 \quad 0$	

Soit le Dividende

	$6aaa-13aab+6abb$	$3a-2b$
Produit	$-6aaa+9aab$	$2aa-3ab$
Reste	$0-4aab+6abb$	

On diviſera $6aaa$ par $2aa$, en diſant : 2 eſt dans 6 trois fois, & effaçant les grandeurs ſemblables, on aura $3a$ pour la premiere partie du Quotient, le reſte s'achèvera de la même maniere, ayant égard aux Coefficiens dont on fera la Diviſion comme dans les Nombres.

Soit le Dividende

	$aabc + accc - abdd - ccdd + dddd$			Diviſeur $ac - dd$; Quotient $ab + cc$
1er prod.	$-aabc$	$+abdd$		
1er reſte.	$0 + accc$	$0 - ccdd + dddd$		à rediviſer.
2e prod.	$-accc$	$+ccdd$		
Reſte	0	$0 + \frac{dddd}{ac - dd}$		lequel ne peut plus ſe diviſer.

Remarque.

24. Il eſt à propos pour faire ces Diviſions avec plus de facilité, de ranger les termes du Dividende & du Diviſeur par rapport à la même lettre, & de choiſir celle qui eſt répetée un plus grand nombre de fois, ce qu'on appelle *ordonner* les termes. On a eu égard à cette obſervation dans les regles propoſées.

DEFINITION IV.

25. Si une grandeur eſt multipliée par elle-même, le produit ſe nomme le quarré de cette grandeur,

La grandeur simple s'appelle la Racine Quarrée ou Cubique, selon le degré auquel cette grandeur est élevée.

Hypothèse VI.

26. Lorsque la même grandeur est multipliée plusieurs fois par elle-même, on est convenu d'exprimer par un chiffre la quantité de fois qu'elle est multipliée par elle-même ; ainsi aa, aaa, & $aaaa$, se marquera de cette maniere a^2, a^3, a^4. Et telle autre quantité, comme b^2, b^3, b^4, b^5, est dite élevée au second, au troisiéme, au quatriéme, au cinquiéme degré, &c.

Et pour marquer qu'une grandeur est élevée à une puissance, ou à un degré indéterminé, on écrit ainsi a^m, c'est-à-dire que la quantité est conçue élevée à un degré quelconque, comme le centiéme, le milliéme, si l'on veut.

On nomme les chiffres qui sont ainsi placés à droite au haut de la grandeur littérale, les *Exposans* de cette grandeur.

Remarque.

27. On va donner la maniere de multiplier & de diviser les grandeurs semblables qui ont des exposans, les unes par les autres : car l'Addition & la Soustraction se font par les signes + & —, comme celles des autres quantités.

Multiplication des grandeurs semblables qui ont des exposans.

Regle.

28. Ajoutez les exposans & écrivez leur somme à droite un peu au-dessus de la grandeur.

Soit $a^3 \times a^4$

On ajoutera les exposans $3+4=7$, qu'il faut écrire ainsi a^7.

En general $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

Demonstration.

Par l'Hypothèse (§ 26) $a^3 = aaa$
& $a^4 = aaaa$

Or $aaa \times aaaa = aaaaaaa = a^7$
par la même hypothèse ; donc il faut ajouter les exposans des grandeurs semblables lorsqu'on veut les multiplier.

Remarque.

29. Si les grandeurs proposées ne sont point semblables comme a^3 & b^2, on les multiplie de cette maniere $a^3 b^2$ suivant l'idée de la multiplication ordinaire ; car on ne peut ajouter les exposans, puisque les quantités sont dissemblables.

Division des grandeurs semblables qui ont des exposans.

Regle.

30. Soustrayez l'exposant du Diviseur, de celui du Dividende.

Soit a^5 à diviser par a^3, écrivez $a^{5-3} = a^2$.



Corollaire.

31. Il faut conclure de cette Démonstration que $a^0 = 1$, car $\frac{a^3}{a^3} = 1$, puisque toute grandeur est dans elle-même une fois ; or par cette regle $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$; donc $a^0 = 1$. Ce qu'il falloit prouver.

Remarque.

32. Une grandeur a^3 déja élevée à un degré quelconque, peut être encore élevée au Quarré, au Cube, &c. D'où suit l'élevation des puissances.

Elévation des Puissances.

Régle.

33. Multipliez l'exposant de la grandeur donnée par l'exposant de la puissance à laquelle vous voulez élever cette grandeur donnée.

Soit a^3 qu'on propose d'élever au Quarré, ou à la seconde puissance. On multipliera l'exposant 3 par 2 qui exprime la seconde puissance. De même pour élever a^4 au cube, on fera $a^{4 \times 3} = a^{12}$, &c.

En general a^m qu'on veut élever à la puissance n, s'écrira a^{mn}.

Démonstration.

Elever a^3 au Quarré, c'est multiplier a^3 par a^3 ; or par la Regle de la Multiplication (§ 28.) il faut écrire $a^{3+3} = a^6$; mais $a^{3 \times 2} = a^6$; donc il faut multiplier les exposans l'un par l'autre, & écrire le produit au haut de la grandeur qu'on veut élever.

DEFINITION V.

34. Extraire la racine d'une puissance seconde,

troisiéme, quatriéme, &c. c'est trouver la grandeur qui multipliée une fois par elle-même (§ 25.) deux fois, trois fois, &c. produit la puissance seconde, troisiéme, quatriéme, &c.

Extraction d'une Puissance.

Régle.

35. Divisez l'exposant de la puissance par l'exposant de la racine que vous voulez extraire.

Soit a^6 dont on demande la racine quarrée, ou la racine deuxiéme, on divisera l'exposant 6 par 2, & on aura $a^{\frac{6}{2}} = a^3$.

De même la racine Cube de a^6 sera $a^{\frac{6}{3}} = a^2$.

En général, la racine n de $a^m = a^{\frac{m}{n}}$.

Démonstration.

Pour élever une grandeur a^3 au Quarré, il faut multiplier 3 par 2, & l'on a a^6; donc pour extraire la racine quarrée de a^6, il faut par la raison contraire diviser l'exposant 6 de la grandeur donnée par celui de la racine qui est 2.

Remarque premiere.

36. On se sert encore de ce signe $\sqrt{}$ pour marquer qu'on veut extraire la racine d'une grandeur,

des expoſans poſitifs. Rien n'eſt plus ordinaire dans le Calcul que de trouver des quantités marquées de cette maniere a^{-3}, a^{-4}. Voici l'origine de ces expoſans négatifs.

Dans la Diviſion des grandeurs qui ont des expoſans poſitifs comme a^3, a^5, &c. par d'autres grandeurs ſemblables qui ont auſſi des expoſans poſitifs, il peut arriver que l'expoſant du Diviſeur ſoit plus grand que celui du Dividende, par exemple dans $\frac{a^3}{a^5}$; or ſuivant l'art. (§ 30) de la Diviſion des grandeurs littérales qui ont des expoſans, il faut ſouſtraire celui du Diviſeur de celui du Dividende; donc on aura ici $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$; c'eſt pourquoi ces expoſans négatifs viennent d'une Diviſion où l'expoſant du Diviſeur eſt plus grand que celui du Dividende; il eſt encore important de remarquer que cette expreſſion $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, ce qu'on démontre ainſi:

Démonſtration.

Suivant la Regle de la Diviſion (§ 23.), on doit effacer les grandeurs ſemblables, on aura donc dans l'exemple propoſé $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1aaa}{aaaaa} = \frac{1}{aa} = \frac{1}{a^2}$.

Mais en ſuivant la Regle (§ 30.) par laquelle il eſt ordonné de ſouſtraire l'expoſant du Diviſeur de celui du Dividende pour faire la Diviſion, on aura pour le même exemple $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$; donc $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

Corollaire.

38. Il s'enſuit que toute grandeur qui a un expoſant négatif, comme a^{-3}, a^{-7}, peut être mar-

quée ainsi : $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^7}$, & par conséquent $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^2}$ $= a^{-3}, a^{-2}$; donc on peut transposer les grandeurs du dénominateur au numérateur, & du numérateur au dénominateur, en changeant les signes ; par conséquent $a^3 b^{-2} = a^3 \times \frac{1}{b^2} = \frac{a^3}{b^2}$, & $\frac{a^4}{b^3} = a^4 b^{-3}$ $= \frac{b^{-3}}{a^{-4}}$, & ainsi des autres.

Remarque troisiéme.

39. Nous ajouterons que les grandeurs dont les exposans sont fractionnaires, comme $a^{\frac{1}{2}}$, viennent de la racine d'une puissance incomplette ; car $\sqrt[2]{a^1}$ $= a^{\frac{1}{2}}$, puisque pour élever (§ 33.) une grandeur qui a un exposant, au Quarré, au Cube, &c. il faut multiplier son exposant par celui de la puissance à laquelle on veut l'élever ; donc pour l'extraire comme on l'a vu dans l'article (§ 30.), il faut diviser l'exposant de la grandeur donnée par celui de la racine ; c'est pourquoi $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[4]{c^1}$, & ces expressions $b^{\frac{2}{3}}, c^{\frac{1}{4}}$ sont des quantités égales.

Il est encore utile de faire attention que ces mêmes expressions peuvent convenir aux nombres, qui peuvent être ainsi caracterisés ; c'est pourquoi 8^2 signifiera le quarré de $8 = 64$, & $4^3 = 64$ & $8^{-3} = \frac{1}{8^3}$, laquelle expression est égale à $\frac{1}{\sqrt[\frac{1}{3}]{8}} = \frac{1}{2}$. De même $9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$. Ces expressions se rencontrent souvent dans le Calcul.

Enfin $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$, ainsi des autres. L'égalité de ces expressions est démontrée par les Remarques précédentes, & par la premiere partie de celle-ci.

Quant au Calcul de ces grandeurs dont les exposans sont négatifs ou fractionnaires, il faut opérer suivant les régles enseignées dans la Multiplication, Division, Elévation, & Extraction, cela ne change rien ; ainsi les regles sont generales : en voici cependant les exemples.

Multiplication & Division des grandeurs qui ont des exposans soit positifs, soit négatifs, entiers, ou fractionnaires.

Regle pour la Multiplication.

40. Suivant la Regle, ajoutez les exposans.

Soit $a^{-3} \times a^{-5} = a^{-3-5} = a^{-8} = \frac{1}{a^8}$, par le Corollaire (§ 38).

Car $-3-5=-8$, donc

Soit $a^{-3} \times a^{+5} = a^{-3+5} = a^2$.

Car $-3+5=2$, donc

Soit $a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}} = a^{\frac{17}{12}} = \sqrt[12]{a^{17}}$ par la troisiéme Remarque (§ 39.).

Car $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$, donc

Soit $a^{-\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{17}{12}} = \frac{1}{a^{\frac{17}{12}}}$

$= \frac{1}{\sqrt[12]{a^{17}}}$ par la troisiéme Remarque (§ 39).

Car $-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=-\frac{17}{12}$, donc

Soit $a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{3}{4}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{1}{12}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{12}}} =$

$\frac{1}{\sqrt[12]{a^1}}$ par la troisiéme Remarque (§ 39.)

Car $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{12}$, qui eſt l'excès ou la différence de ces deux fractions, donc

Régle pour la Diviſion.

41. Souſtrayez l'expoſant du Diviſeur de celui du Dividende.

Soit $\frac{a^{-3}}{a^{-5}}$, on fera ſuivant la regle $a^{-3+5} = a^2$;

Car $-3+5=2$, donc

Soit $\frac{a^{-\frac{3}{4}}}{a^{-\frac{2}{3}}} = a^{-\frac{3}{4}+\frac{2}{3}} = a^{-\frac{1}{12}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^1}}$, (§ 39.)

On peut ſuppléer à la diverſité des ſignes que peuvent avoir les expoſans, ce qui fournira différens exemples qu'on a négligé de donner.

Exaltation & Extraction de ces mêmes grandeurs.

Régle pour l'Exaltation.

42. Multipliez l'expoſant de la grandeur donnée, par celui auquel vous voulez l'élever.

Soit a^{-3} à élever à la quatriéme puiſſance, on fera $a^{-3 \times 4} = a^{-12} = \frac{1}{a^{12}}$.



Si les expoſans ſont fractionnaires, il faut ſeulement avoir égard au calcul des fractions numériques, & opérer ſuivant la Regle.

Régle pour l'Extraction.

43. Diviſez l'expoſant de la grandeur propoſée par l'expoſant de la racine.

Soit a^{-3}, & $a^{\frac{5}{2}}$, & $a^{-\frac{7}{3}}$, dont on demande la racine quatriéme, on fera en diviſant les numérateurs par 4, $a^{-\frac{3}{4}}$, & $a^{\frac{5}{8}}$, & $a^{-\frac{7}{12}}$, leſquelles peuvent être changées dans les expreſſions qui ſuivent; la premiere en celle-ci $\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$, la ſeconde eſt égale à $\sqrt[8]{a^5}$, & la troiſiéme à $\frac{1}{a^{\frac{7}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^7}}$ ſelon la Remarque (§ 39.)

Corollaire important.

44. Il eſt aiſé de remarquer que le calcul des grandeurs qui ſont accompagnées des ſignes radicaux, devient très-facile par celui qu'on vient d'enſeigner ſur les expoſans, puiſque toute grandeur qui a un ſigne radical, peut changer d'expreſſion, & être convertie en une autre qui lui ſoit égale, & qui ait un expoſant fractionnaire. C'eſt l'idée que l'on s'eſt propoſée dans l'invention de ce calcul qui eſt d'un grand uſage dans les Mathématiques.

Soit par exemple $\sqrt{a^3} \times \sqrt[3]{a^2}$, on fera $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$, & $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$, or pour multiplier $a^{\frac{3}{2}}$ par $a^{\frac{2}{3}}$, on écrira $a^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{13}{6}} = \sqrt[6]{a^{13}}$.

Il ne ſera pas plus difficile de diviſer les ſignes

radicaux, de les élever à une puissance quelconque, & d'extraire de nouvelles racines, il suffira de faire évanouir les signes radicaux, en donnant aux grandeurs les expressions fractionnaires qui leur sont égales, & on fera alors comme il a été enseigné dans les regles précédentes. On auroit pu faire plusieurs remarques sur ce calcul, & en déduire plusieurs conséquences qu'il est plus avantageux de trouver par soi-même.

Si l'on n'a pas employé des exposans généraux, c'est qu'ils sont inutiles pour les regles présentes, & qu'il est facile d'en substituer.

DEFINITION VI.

45. Un rapport est la comparaison de deux grandeurs semblables, si l'on examine combien la grandeur contient où est contenue dans celle avec laquelle on la compare. On appelle ce rapport, *rapport géométrique*, on le marque de cette maniere $\frac{a}{b}$ Cette expression signifie donc que l'on compare a avec b, & que c'est un rapport géométrique, ou un rapport de division: a est l'antécédent, & b le conséquent; si le rapport de $\frac{a}{b}$ est nommé *direct*, celui de $\frac{b}{a}$ sera nommée *réciproque* ou *inverse*.



DEFINITION VII.

Théorême I.

47. Dans toute Proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Démonstration.

Soit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ou $a.b :: c.d$, je dis que $ad = bc$.

Soit le quotient de $\frac{a}{b} = q$, celui de $\frac{c}{d} = q$, puisque les deux rapports sont supposés égaux; donc (§23.) $qb = a$, & $qd = c$. La proportion proposée pourra donc être changée en celle-ci $qb.b :: qd.d$; or en multipliant les extrêmes l'un par l'autre, ainsi que les moyens, on aura $qbd = qbd$, c'est-à-dire, qu'on trouve les mêmes quantités de part & d'autre; donc le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Delà on conclut que si $a.b :: b.c$, que le produit $ac = bb$.

Corollaire.

48. Si j'ai $ad = bc$, & que je fasse $a.b :: c.d$, ou bien $c.a :: d.b$, ce qui s'appelle prendre les grandeurs *réciproquement*, j'aurai toujours $ad = bc$, ou le produit des extrêmes égal au produit des moyens; donc le produit de deux grandeurs étant égal au produit de deux autres, on pourra toujours mettre ces grandeurs en proportion, pourvû que l'on conserve le produit des extrêmes égal au produit des moyens.

Théorême II.

49. Quatre grandeurs étant en proportion géométrique, elles y seront encore des quatre manieres suivantes, qu'on nomme . . . . { *invertendo.* *alternando.* *addendo.* *substrahendo*

Démonstration.

Soit $a . b :: c . d$, je dis $b . a :: d . c$, changement qu'on nomme *invertendo.*

Car on aura $bc = ad$, c'est-à-dire, le produit des extrêmes égal à celui des moyens.

De même, soit $a . b :: c . d$, je dis que $a . c :: b . d$, on nomme ce changement *alternando.*

Car on aura $ad = bc$, donc, &c.

Soit encore $a . b :: c . d$, je dis que $a + b . b :: c + d . d$, ce changement s'appelle *addendo.*

Car en prenant le produit des extrêmes & des moyens, on aura $ad + bd = bc + bd$, ôtant de part & d'autre bd, on trouve $ad = bc$, donc.

Soit enfin $a . b :: c . d$, je dis que $a - b . b :: c - d . d$, changement qu'on appelle *subftrahendo.*

Car $ad - bd = bc - bd$; donc en ôtant bd de part & d'autre, on aura $ad = bc$.

On peut par le même principe déduire de nouvelles conséquences. Soit par exemple $a . b :: c . d$, $m . a :: p . r$, on conclura que $m . b :: pc . dr$, ce qu'on appelle *componendo.*

Soit encore deux suites de grandeurs a, b, c, & e, d, f, telles que $a . b :: e . d$, & $b . c :: d . f$, on conclud que $a . e :: c . f$, ce qu'il est aisé de démontrer.

De même, si l'on suppose a, b, c, & e, f, g,
En sorte que $a . b :: f . g$,



Démonstration.

Il faut démontrer que $a. b :: ac. bc$; or le produit des extrêmes $abc = abc$ produit des moyens, ce qui est évident, puisque ce sont les mêmes quantités, donc

Corollaire.

51. Il suit qu'on peut multiplier les termes d'une proportion par telle quantité que l'on voudra, & les nouveaux produits seront en proportion.

Théorême IV.

52. Deux grandeurs a & b divisées par une même, comme c, les quotiens sont en même raison que les grandeurs.

Démonstration.

Il faut démontrer que $a. b :: \frac{a}{c}. \frac{b}{c}$, ce qui est évident, puisque $\frac{ab}{c}$, produit des extrêmes est égal à $\frac{ab}{c}$, produit des moyens; donc, &c.

Corollaire.

53. On peut diviser les termes d'une proportion par telle quantité que l'on voudra, & les nouvelles quantités ou quotiens seront en proportion.

Théorême V.

54. La même grandeur étant divisée par deux autres, les quotiens comme $\frac{a}{b}$, & $\frac{a}{c}$ sont réciproquement comme les diviseurs.

Démonstration.

$\frac{a}{b} . \frac{a}{c} :: c . b$, puisque le produit des extrêmes $\frac{ab}{b} = \frac{ac}{c}$ produit des moyens ; car $\begin{cases} \frac{ab}{b} = a. \\ \frac{ac}{c} = a. \end{cases}$

Théorême VI.

55. Quatre grandeurs étant proportionnelles, $a . b :: c . d$, on pourra dire que $a . b :: \frac{1}{d} . \frac{1}{c}$ c'est-à-dire que les deux premieres sont comme l'unité divisée réciproquement par les grandeurs qui font le second rapport.

Démonstration.

Puisque $a . b :: c . d.$ en divisant le second rapport par c, on aura $a . b :: 1 . \frac{d}{c}$. en divisant ce même rapport $1 . \frac{d}{c}$ par d, on aura $a . b :: \frac{1}{d} . \frac{1}{c}$, donc, &c.

Théorême VII.

56. Lorsqu'on a une suite de plusieurs rapports égaux, comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{f}{g}$, la somme des antécédens $a + c + f$, est à la somme des conséquens $b + d + g$, comme un antécédent est à son conséquent, comme $a . b$.

Démonstration.

Si $a + c + f$, $b + d + g :: a, b$, on aura le produit des extrêmes $ab + bc + bf = ab + ad + ag$ produit des moyens ; or ces deux produits sont égaux, puisque $bc = ad$, & $bf = ag$, donc, &c.

Problême VI.

57. Trois grandeurs étant données, on propose de trouver une quatriéme proportionnelle.

Régle.

1°. Multipliez les deux derniers termes l'un par l'autre.

2°. Divisez le produit par le premier terme, & le quotient sera le quatriéme proportionnel.

EXEMPLE.

Soient les trois grandeurs $a, b, c,$ données, & l'on cherche la quatriéme proportionnelle nommée x, on fera $a. b :: c. x$, on aura donc $x = \frac{bc}{a}$. Car $ax = bc$, or deux quantités égales divisées par des quantités égales sont égales, donc.

Remarque.

58. Dans la Multiplication, on cherche une grandeur qui soit au Multiplicande, comme le Multiplicateur est à l'unité, c'est-à-dire $1. a :: b. ab$; car les trois premiers termes $1, a, b,$ sont donnés, & le quatriéme sera $\frac{ab}{1} = ab$.

Au contraire, dans la Division le dividende est au diviseur, comme le quotient est à l'unité $ab. a :: b. 1$, c'est l'inverse de la Proportion précédente; ainsi la Multiplication & la Division sont deux regles de proportion dans lesquelles l'unité est un des termes.

Problême VII.

59. Partager une grandeur en plusieurs parties

qui soient proportionnelles à d'autres grandeurs données.

Régle.

1°. Ajoutez toutes les grandeurs données.

2°. Faites de cette somme le premier terme d'une Proportion.

3°. Mettez pour le second la grandeur qui doit être divisée.

4°. Prenez pour troisiéme terme une des quantités proposées.

5°. Faites autant de regles de proportion qu'il y a de grandeurs données.

EXEMPLE.

Soit f à partager en trois parties x, z, y, qui soient entre elles comme a, b, c.

On fera comme $a+b+c . f :: a . x = \frac{af}{a+b+c}$

De même comme $a+b+c . f :: b . y = \frac{bf}{a+b+c}$

De même comme $a+b+c . f :: c . z = \frac{cf}{a+b+c}$

Démonstration.

On a $a . x :: b . y$, puisque a & x, b & y sont entre eux comme $a+b+c$ & f, c'est-à-dire,



les produits abc, & dfg, forment un rapport composé $\frac{abc}{dfg}$.

Théorême VIII.

61. Un rapport composé a toujours pour exposant le produit des exposans de chacun des rapports simples.

Soient les rapports simples.... $\begin{cases} a \ \& \ d = \frac{a}{d} \\ b \ \& \ f = \frac{b}{f} \\ c \ \& \ g = \frac{c}{g} \end{cases}$

$abc, \ dfg$

L'exposant du produit des antécédens abc & des conséquens dfg, est égal au produit des exposans de a & d, de b & f, de c & g qui sont les rapports simples.

Démonstration.

Soit le rapport de $\frac{a}{d} = q$; donc $qd = a$ (art. 23)

celui de .... $\frac{b}{f} = p$; donc $pf = b$

celui de .... $\frac{c}{g} = r$; donc $rg = c$

Donc $qdpfrg = abc$; donc $\frac{abc}{dfg} = \frac{qdpfrg}{dfg} = qpr$; (art. 23.); or qpr est le produit des exposans de chacun des rapports simples qui ont été proposés; donc, &c.

Corollaire.

Soient les deux rapports $x = \frac{ab}{c}$, & $z = \frac{fg}{d}$, on aura $x.z :: abd.fgc$; c'est-à-dire que les deux grandeurs x & z sont en raison composée directe des antécédens, & de la raison inverse des consé-

quens. Par l'Hypothèſe $x. z :: \frac{ab}{c}. \frac{fg}{d}$, en multipliant le ſecond rapport $\frac{ab}{c}, \frac{fg}{d}$ par les conſéquens cd, on aura après la réduction $x. z :: abd. fgc$; or cette raiſon eſt compoſée de la directe ab, & fg, & de l'inverſe d & c; donc, &c.

Définition IX.

62. Si l'on conçoit deux rapports égaux, le rapport compoſé qui en réſulte eſt nommé *Rapport doublé*; de même ſi le rapport compoſé eſt formé de trois rapports égaux, il s'appelle *Rapport triplé.*

Soient deux Rapports égaux $a. b :: c. d$, ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, le produit des antécédens ac, & celui des conſéquens bd, s'appellera *Rapport doublé*, parce qu'il eſt compoſé de deux rapports égaux.

Soient les trois Rapports égaux $a. b :: c. d :: f. g$, ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{f}{g}$, le produit des antécédens acf, & celui des conſéquens bdg, ſe nommera *triplé*, parce qu'il eſt formé de trois rapports égaux.

Théorême IX.

63. Les produits qui ſont en raiſon doublée, ſont comme les quarrés de leurs racines, & les

pour expoſant ; c'eſt-à-dire $\frac{ac}{bd} = qq$, (par l'art. 61) or les quarrés des racines $\frac{aa}{bb}$, ou $\frac{cc}{dd}$ auront auſſi qq pour expoſant ; donc les produits qui ſont formés de deux rapports égaux ſeront entr'eux comme les quarrés de leurs racines, ou $ac. bd :: aa. bb$. Il eſt facile d'apliquer la démonſtration au rapport triplé.

Corollaire I.

64. Lorſque des produits ab, cd, & abf, cdg, ont leurs racines proportionnelles comme $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{f}{g}$, ce ſont des *produits ſemblables* ; car puiſqu'ils ſont formés de deux ou de trois rapports égaux, ils ont leurs racines proportionnelles.

Corollaire II.

65. Si trois grandeurs a, b, c, ſont en proportion continue, le premier terme a eſt au troiſiéme comme le quarré du premier eſt au quarré du ſecond ; car ſoit $\frac{a}{b} = q$; de même $\frac{b}{c} = q$; on aura (§ 61.) en prenant le rapport compoſé de ces deux rapports, celui de $\frac{ab}{bc}$, ou $\frac{a}{c} = qq$; pareillement le rapport compoſé de $\frac{aa}{bb} = qq$; donc ces deux rapports ſont égaux, donc $a. c :: aa. bb$. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut conclure de ce Corollaire que dans une ſuite de termes qui ſont en proportion continue, le premier terme eſt au quatriéme, comme le cube du premier eſt au cube du ſecond ; c'eſt la même Démonſtration.

En général, ſoit a le premier terme, b le ſecond,

x le dernier terme, & n le nombre qui désigne la quantité des moyens proportionnels, on aura $a^{n+1}. b^{n+1} :: a. x$; c'est-à-dire que le premier terme (élevé à un degré plus grand de l'unité que le nombre qui exprime celui des moyens proportionnels) est au second élevé au même degré, comme le premier est au dernier; d'où l'on peut voir (art. 57.) que l'on aura la valeur du dernier terme de la progression, si le premier & le second sont donnés, avec le nombre des moyens proportionnels.

Corollaire III.

66. Le rapport $\frac{aa}{bb}$ étant un rapport doublé, celui de $\frac{a}{b}$ est dit sous-doublé, parce que c'est le rapport simple dont l'autre a été formé. En général $\frac{a^n}{b^n}$ est un rapport composé de plusieurs rapports égaux à celui de $\frac{a}{b}$, & d'autant de rapports que l'on conçoit d'unités dans l'exposant n. Celui de $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ est un rapport simple, dont $\frac{a}{b}$ est le rapport composé; car élevant $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ à la puissance n, on aura $\frac{a}{b}$, donc.

m, qui par la ſuppoſition n'eſt point un nombre quarré, le rapport ſimple $\frac{a}{b} = \sqrt{m}$, ne pourra être exprimé par un nombre, puiſqu'un nombre qui n'eſt point quarré ne peut avoir de racine, ou ce qui eſt la même choſe, eſt incommenſurable ; c'eſt le même raiſonnement pour le rapport triplé & telle autre puiſſance qui doit avoir pour expoſant un nombre qui ſoit d'un dégré égal à celui du rapport propoſé.

On peut déduire pluſieurs Corollaires ſur les rapports égaux, qu'il eſt aiſé de trouver & qui ſuivent de ceux-ci.

Problême VIII.

68. Trouver une grandeur qui ſoit à une autre donnée en rapport compoſé de pluſieurs quantités données.

Regle.

1°. Prenez le rapport compoſé des grandeurs données, ce qui ſe fait par la Multiplication. (61.)

2°. Faites une Regle de proportion dont le rapport compoſé ſera les deux premiers termes, & la grandeur donnée le troiſiéme terme.

3°. Le quatriéme terme ſera la grandeur cherchée.

EXEMPLE.

Soit la grandeur f qui doit être à x en rapport compoſé de .... $\frac{b}{c}$ & $\frac{d}{g}$.

le rapport compoſé ſera bd, cg.

On dira comme $bd. cg :: f. x = \frac{fcg}{bd}$.

Démonſtration.

La grandeur f eſt à x :: bd eſt à cg ; or bd & cg ſont (§ 61.) en raiſon compoſée des grandeurs don-

nées ; donc $\frac{f}{x}$ égal à $\frac{bd}{cg}$ eſt en raiſon composée de b, c, & de d, g.

Problême IX.

69. Partager une grandeur en pluſieurs parties qui ſoient entre-elles en raiſon composée de pluſieurs grandeurs données.

Régle.

1°. Prenez le rapport composé (61.)
2°. Ajoutez enſemble les deux termes du rapport composé.
3°. Operez enſuite comme il eſt marqué à l'Article. (68.)

EXEMPLE.

Soit p qu'on veuille diviſer en deux parties x & y, qui ſoient en raiſon composée de $\frac{b}{c}$ & $\frac{f}{g}$

On prendra le rapport composé (61) $\overline{bf \,\&\, cg}$, lequel étant ajouté, on aura $bf + cg$, puis il faut dire :

Comme $bf + cg. \; p :: bf. \; x = \frac{bfp}{bf + cg}$.

De même $bf + cg. \; p :: cg. \; y = \frac{cgp}{bf + cg}$

Démonſtration.

Problême X.

71. Ajouter deux ou plusieurs fractions.

Régle.

Ajoutez ces rapports ou fractions, en vous servant du signe +.

Soient les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{f}{g}$, qu'on veut ajouter, on aura . . . $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{f}{g}$.

Problême XI.

72. Soustraire une fraction d'une autre fraction.

Régle.

Otez la fraction qui doit soustraire de celle qui doit être soustraite, en vous servant du signe —.

Soit la fraction $\frac{a}{b}$ qu'on veut ôter de la fraction $\frac{c}{d}$, écrivez $\frac{c}{d} - \frac{a}{b}$.

Démonstration.

Le signe + a été établi pour marquer l'Addition, & le signe — pour faire la Soustraction, donc, &c.

Problême XII.

73. Multiplier deux ou plusieurs fractions l'une par l'autre.

Régle.

1°. Multipliez les numérateurs les uns par les autres, & vous aurez le numérateur du produit.
2°. Multipliez les dénominateurs les uns par les autres, & vous aurez le dénominateur du produit.

EXEMPLE.

Soient les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ à multiplier l'une par l'autre, on écrira $\frac{ac}{bd}$, & cette fraction sera le produit.

Démonstration.

Par la Remarque du Probl. 6e. (58.) on sçait que dans toute multiplication, l'unité est au multiplicande comme le multiplicateur est au produit, ou $1 . \frac{a}{b} :: \frac{c}{d} . \frac{ac}{bd}$; or le produit des extrêmes $1 \times \frac{ac}{bd}$, ou $\frac{ac}{bd}$ est égal au produit des moyens qui est également $\frac{ac}{bd}$; donc $\frac{ac}{bd}$ est le quatriéme proportionnel, ou le produit cherché.

Problême XIII.

74. Diviser une fraction par une autre fraction.

Régle.

1°. Multipliez le numerateur de la fraction à diviser par le dénominateur de celle qui divise, & le produit sera le dénominateur de la fraction.

3°. Multipliez le dénominateur de la fraction à diviser par le numerateur de celle qui divise, & le produit sera le dénominateur de la fraction.

EXEMPLE.

Soit la fraction $\frac{a}{b}$ à diviser par $\frac{c}{d}$.

On multipliera a par d, & b par c, & l'on aura $\frac{ad}{bc}$ pour le quotient.

Démonstration.

Dans toute Division il a été démontré par la Remarque du Probl. 6[e]. (58) que le dividende est au diviseur comme le quotient est à l'unité, ou que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} :: \frac{ad}{bc} \cdot 1$. Or le produit des extrêmes $\frac{a}{b} \times 1$, ou $\frac{a}{b}$ est égal au produit des moyens $\frac{adc}{cbd} = \frac{a}{b}$.

Pour diviser des fractions on dit qu'il faut les multiplier *en croix de saint André.* Voilà quelles sont les regles des simples fractions.

Operation des Fractions avec des grandeurs entieres.

Problême I.

75. Réduire un entier en fraction qui ait un dénominateur donné.

Régle.

Multipliez la grandeur donnée par le dénominateur proposé, & divisez le produit par le même dénominateur.

Soit proposé ab qu'il faut réduire à une fraction qui ait c pour dénominateur, on fera $ab \times c = abc$, qu'on divisera par c, & l'on aura $\frac{abc}{c} = ab$ grandeur donnée.

Démonstration.

On multiplie & on divise la grandeur donnée par la même quantité, donc elle ne change point de valeur.

Problême II.

76. Réduire des fractions à la même dénomination.

1°. Soit proposé les deux fractions $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{d}$, on fera $\frac{ad}{bd}$ en multipliant la premiere par d, & $\frac{bc}{bd}$ en multipliant la seconde par b, & l'on aura $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd} = \frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$.

2°. Soient ces fractions avec des grandeurs entieres $a + \frac{ab}{c}$, & $b - \frac{ac}{c}$ à réduire à la même dénomination.

On fera d'abord par la Regle précédente (75), $a + \frac{ab}{c} = \frac{ac + ab}{c}$.

De même $b - \frac{ac}{b} = \frac{bb - ac}{b}$.

Et l'on aura $\frac{ac + ab}{c}$, & $\frac{bb - ac}{b}$.

Puis (par le premier article) on multipliera les deux termes de chaque fraction par le dénominateur de l'autre; on aura donc $\frac{acb + abb}{cb}$, & $\frac{bbc - acc}{[illegible]}$, & ces deux fractions égales aux deux

Remarque.

77. Si l'on propose de multiplier ou de diviser :s grandeurs entieres avec des fractions, par des 'andeurs entieres & des fractions, voici la regle.

Régle.

éduisez tout en fractions, & faites ensuite l'opération comme il a été enseigné aux articles de la Multiplication, si vous voulez multiplier, & de la Division, si vous voulez diviser.

EXEMPLE.

Soit $a + \frac{aa}{b}$, & $b - \frac{cc}{d}$ qu'il faut multiplier un par l'autre, on fera 1°. $\frac{ab + aa}{b}$, puis $\frac{bd - cc}{d}$; °. on multipliera ensuite les numérateurs & les énominateurs les uns par les autres, & l'on aura $\frac{bd + aabd - abcc - aacc}{bd}$ pour le produit total. oilà pour la multiplication.

Et pour la Division vous réduirez les grandeurs ɔnnées à la même préparation que $\frac{ab + aa}{b}$, & $\frac{- cc}{d}$, après quoi par les regles de la Division ı aura $\frac{abd + add}{bbd - ccb}$ pour le quotient, en multipliant numérateur de l'une par le dénominateur de ıutre.

Démonstration.

Ces opérations ont été démontrées, dans les ·ticles précédens (73, 74.) & dépendent du ıême principe que l'on a plusieurs fois répeté, qu'un ıpport multiplié par la même grandeur ne change ɔint de valeur.

Remarque.

78. Presentement qu'on sçait le Calcul des grandeurs entieres & des fractions, voici la méthode de faire une Division complexe composée de grandeurs entieres & de fractions, & dont le Diviseur est composé pareillement de fractions.

Soit proposé

$$\frac{1x^3}{3b} - \frac{5axx}{8b} + \frac{2}{3}ax + \frac{3aax}{1bb} - \frac{aa}{4} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3}x - \frac{1a}{4} \quad \textit{Quotient.} \\ \hline \frac{xx}{2b} - \frac{3ax}{4b} + a. \quad \textit{div.} \end{array} \right.$$

On dira $\frac{x^3}{3b}$ divisé par $\frac{xx}{2b} = \frac{2bx^3}{3bx^2} = \frac{2}{3}x.$

On mettra donc $\frac{2}{3}x$ au quotient, on multipliera suivant les regles, ce quotient par tous les termes du Diviseur, & l'on aura $\frac{2}{3}x \times \frac{xx}{2b}$, ou

$$+\frac{2x^3}{6b} = +\frac{1x^3}{3b}$$

De même $\frac{2}{3}x \times -\frac{3ax}{4b} = -\frac{6ax^2}{12b} = -\frac{1ax^2}{2b}$
puis $\frac{2}{3}x \times a = \frac{2}{3}ax.$

Il faut ensuite soustraire ces termes $\frac{1x^3}{3b} - \frac{1ax^2}{2b}$

On continuera l'opération ſur $-\frac{1ax^2}{8b} + \frac{3aax}{1bb} - \frac{aa}{4}$, & on trouvera que $-\frac{1ax^2}{8b}$ diviſé par $\frac{xx}{2b} = \frac{2bax^2}{8bx^2} = \frac{1a}{4}$, qu'il faut mettre au quotient, le reſte s'achevera comme il a été fait ci-deſſus.

Corollaire.

79. On doit voir par cette Méthode qui enſeigne à employer le calcul des fractions, qu'il n'y a point de diviſion qui ne puiſſe être continuée à l'infini, quand même le Dividende & le Diviſeur n'auroient point de grandeurs ſemblables ; on le comprendra par les exemples qui ſuivent.

Soit à diviſer a par $a+b$, on arrangera ainſi les termes

$$a \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3}, \text{ \&c.} \\ \hline a+b \end{array} \right.$$
$$o$$

1er. reſte $-\ b$

2e. reſte $+\frac{b^2}{a}$

3e. reſte $-\frac{b^3}{a^2}$

4e reſte $+\frac{b^4}{a^3}$

En commençant la Diviſion vous direz a diviſé par a donne 1 qui multiplié par $a+b$ donne $a+b$, lequel produit étant ſouſtrait du dividende a, il reſte $-b$, on continuera la diviſion ſur $-b$ qui reſte, & qui diviſé par a donne pour quotient $-\frac{b}{a}$, vous multiplierez ce quotient par le diviſeur, & vous ferez la Souſtraction, vous parviendrez ainſi à de nouveaux reſtes ſur leſquels on peut continuer à l'infini, &c.

divisera le second terme $-2x^2bc$ par $+2x^2$ double de la racine, on a pour quotient $-bc$ qui est la seconde racine, laquelle multipliée par $+2x^2$, & soustraite du second terme, il ne reste rien : prenez ensuite le quarré de cette seconde racine $-bc$ que vous ôterez du troisiéme terme, il ne restera rien, parce que la puissance est exacte, & vous aurez pour racine x^2-bc.

Remarque premiere.

82. S'il y a des coefficiens qui accompagnent les termes de l'Exemple proposé, il faut tirer la racine des coefficiens.

AUTRE EXEMPLE.

$$\text{Soit } 4b^4 - 12ab^2c + 9a^2c^2 \left\{ \frac{2b^2 - 3ac}{4b^2} \right.$$
$$\frac{-4b^4 + 12ab^2c - 9a^2c^2}{\quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \quad}$$

Pour extraire la racine quarrée de cette quantité complexe, on dira la racine de $4b^4$ est $2b^2$; car la racine de 4 est 2, & la racine de b^4 est b^2 ; on prendra le double de cette racine qui est $4b^2$ par laquelle vous diviserez $12ab^2c$, & vous aurez pour la seconde racine $-3ac$, qui multiplié par $4b^2$, & le produit ôté du second terme, il ne reste rien ; vous acheverez en prenant le quarré de cette racine $-3ac = 9a^2c^2$ que vous ôterez de $9a^2c^2$, & l'operation sera finie, & la puissance sera exacte.

Remarque seconde.

83. S'il y a plus de deux racines, trouvez les deux premieres par la méthode qui vient d'être enseignée, puis divisez les grandeurs qui suivent par le double des racines que l'on a trouvées, & le quotient

ent ſera la troiſiéme racine, ôtez enſuite le quarré e cette troiſiéme racine, ainſi de ſuite. Par exemple

Soit $\left\{\begin{matrix} 4b^4 - 12ab^2c + 9a^2c^2, + \\ 20b^2d^2 - 30acd^2 + 25d^4 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 2b^2 - 3ac, + 5d^2 \\ \hline 4b^2 - 6ac \end{matrix}$

L'on a vû que les racines des trois premiers ter- ıes étoient $2b^2 - 3ac$ dont le double eſt $4b^2 - 6ac$, ſi l'on diviſe les termes ſuivans $20b^2d^2 -$ $0acd^2$ par le double de ces racines, on aura ı quotient $+ 5d^2$ pour troiſiéme racine; & fai- ınt la multiplication & la ſouſtraction, il ne reſtera ue $25d^4$ qui ſera détruit par la ſouſtraction du uarré de $5d^2$ qui eſt également $25d^4$.

Démonſtration de la Racine quarrée.

Il ſuffit d'élever $a + b$ à ſon quarré, qui eſt $aa + 2ab + bb$; & de remarquer que le premier :erme eſt le quarré de la premiere racine, que le ècond exprime un produit composé du double de a premiere racine par la ſeconde, & que le troi- ſiéme terme eſt le quarré de la ſeconde racine: il s'en- ıit donc que dans l'extraction d'une racine quarrée, faudra ôter de ſemblables produits de la puiſſance ropoſée; c'eſt pour cela qu'après avoir pris la ra- ine quarrée du premier terme, on doit en ſouſtraire : quarré de cette racine, & que le ſecond terme tant un produit composé du double de la premiere acine par la ſeconde; l'on diviſe ce même produit ıar le double de la premiere racine, pour avoir la ſe- :onde; enfin le troiſiéme terme de la puiſſance étant e quarré de cette ſeconde racine, il faut ſouſtraire le ce même terme le quarré de la racine que la divi- ion a fait découvrir. Il eſt donc clair que par cette opération l'on ôte des produits ſemblables & en même quantité de ceux que renferme la puiſſance propoſée; donc, &c.

Remarque troisiéme.

84. Si la puissance n'est pas exactement parfaite il faut cependant agir de la même maniere, mais il y aura alors des restes comme dans l'exemple qui suit $cc + 2cd + dd + bf$, on trouvera que la racine est $c + d$, & qu'il reste $+ bf$. On suppose encore dans le problême, que la puissance est parfaite en partie car on pourroit proposer telle quantité algébrique comme $ab + cd + fg$, & une infinité d'autres où la regle qu'on vient d'enseigner n'auroit pas lieu; on se contente alors d'exprimer la racine par un signe de cette maniere $\sqrt{ab + cd + fg}$, & lorsqu'on veut approcher de la racine; (ce qui est la seule chose qu'on puisse faire, puisque la puissance est imparfaite) on a recours à quelques méthodes que l'on enseignera après l'extraction de la racine cube.

Problême VII.

85. Extraire la racine cube d'une quantité complexe.

Régle.

Après avoir ordonné les grandeurs proposées par rapport à une lettre, ainsi que dans la racine quarrée, l'on agira comme il va être enseigné.

Soit

1er terme. 2e. 3e. 4e.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \left\{ \begin{array}{l} a + b \text{ Racine.} \\ \hline 3a^2 = 3 \times a^2 \text{ diviseur.} \\ 3ab^2 = 3a \times b^2 \text{ produit.} \\ b^3 \text{ cube de la seconde.} \end{array} \right.$$

On dira la racine cube de a^3 est a qu'on placera à la racine, laquelle élevée au cube & ôtée du premier terme il ne reste rien; il faut prendre le quarré de cette racine & le tripler, ce qui donne

$3a^2$, après quoi vous diviſerez le ſecond terme $3a^2b$ par ce produit, le quotient qui eſt b ſera la ſeconde racine, & ce ſecond terme s'évanouira par la multiplication & la ſouſtraction ; vous prendrez enſuite le triple de la premiere racine $3a$ que vous multiplierez par le quarré de la ſeconde racine, & & vous aurez $3ab^2$; enfin prenez le cube de cette ſeconde racine qui eſt b^3, & ſouſtrayant ces deux produits l'un du troiſiéme & l'autre du quatriéme terme, il ne reſtera rien, & la racine de la puiſſance eſt $a+b$.

Remarque premiere.

86. Si les termes de la grandeur propoſée ont des coëfficiens, il faut y avoir égard, & extraire la racine cube de la grandeur numérique comme de la grandeur littérale.

Soit

$$\overset{1^{er}}{8a^3} - \overset{2^e}{36a^2b} + \overset{3^e}{54ab^2} - \overset{4^e}{27b^3} \begin{cases} 2a-3b \text{ Racine.} \\ \hline +12a^2 \text{ Divif.} = 3\times 4a^2 \end{cases}$$

On dira la racine cube de $8a^3$ eſt $2a$, parce que la racine cube de a^3 eſt a, & celle de 8 eſt 2. Pour avoir la ſeconde racine, vous prendrez le triple du quarré de cette premiere racine qui eſt $12a^2$, parce que le quarré de a eſt a^2, & le quarré de 2 eſt 4 dont le triple eſt 12, vous diviſerez le ſecond terme $-36a^2b$ par $+12a^2$, & le quotient qui eſt $-3b$ ſera la ſeconde racine ; vous multiplierez enſuite, comme on l'a dit dans la regle, le triple de la premiere par le quarré de la ſeconde, & vous aurez $6a\times 9b^2$, ou $54ab^2$, que vous ſouſtrairez du troiſiéme terme, enfin prenez le cube de la ſeconde ra-

triple du quarré de la 1ere
$6a\times 9b^2 = 54ab^2 = 3\times 2a$ *triple de la prem. par le quarré de la ſec.* $= 9b^2$
$-27b^2$, *cube de la ſeconde.*

cine qui est — $27b^3$ que vous ôterez du quatriè
il ne restera rien.

Remarque seconde.

87. Si la grandeur proposée a plus de deux r
cines, la regle est la même, il faut seulement fa
attention que les deux premieres racines doiv
être regardées comme n'en faisant qu'une, c'es
dire qu'il faut diviser les termes qui suivent par
triple du quarré des deux premieres racines, po
avoir la troisiéme, puis soustraire le triple des de
premieres racines par le quarré de la troisiéme; en
ôter le cube de la troisiéme, ainsi de suite. Cet
Remarque renferme la regle générale pour l'extr
ction de la racine cube.

Soient proposés les termes qui suivent.

$$\left\{\begin{array}{l} 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 \\ + 60a^2c - 180abc + 135b^2c \\ + 150ac^2 - 225bc^2 + 125c^3 \end{array}\right.$$

$2a - 3b + 5c$ Racine

$3 \times (4a^2 - 12ab + 9b^2)$
ou $12a^2 - 36ab + 27b^2$
Triple du quarré des deux premieres racines.

$3 \times (2a - 3b) \times 25c^2$
$150a^2c - 225bc^2$
Triple des deux premieres par le quarré de la troisiéme.

Les quatre premiers termes ont pour racine $2a - 3b$ comme on l'a vû ci-dessus, il faut donc suivant la regle, diviser le terme qui suit $60a^2c$, &c. par le triple du quarré des deux premieres racines $2a - 3b$ qui est $12a^2 - 36ab + 27b^2$, & l'on aura pour troisiéme racine $+ 5c$ qui multiplié par ce diviseur, & le produit étant soustrait, les trois termes contenus dans la seconde ligne s'évanouiront. Si l'on prend le produit du triple des deux premieres racines par le quarré de la troisiéme, plus le cube de la troisiéme, & qu'on fasse la Soustraction, les trois derniers termes qui restent s'effaceront, & l'opération sera finie.

Remarque troisiéme.

88. On a coutume de prendre le cube $a^3 + 3a^2b + 2ab^2 + b^3$ pour formule, & de s'en servir dans ces opérations comme d'un guide, en supposaut que a represénte la premiere racine, & b la seconde lorsqu'on n'en cherche que deux, & après l'extraction de ces deux premieres, la même lettre a representera les deux premieres racines, & b la troisiéme, en sorte que les produits $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, désignent toujours ceux qu'il faut former; de maniere que le terme $3a^2b$ signifie tantôt le triple du quarré de la premiere, ou des deux premieres, ou des trois premieres racines par la seconde, ou la troisiéme, ou la quatriéme racine, &c. C'est le même raisonnement & la même idée qu'il faut appliquer à la signification des autres termes.

Démonstration.

La puissance de $a + b$ élevée au cube donne $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; or cette puissance qui a deux racines est composée du cube de la premiere; plus d'un produit fait du triple du quarré de la premiere par la seconde; plus d'un autre produit fait du triple de la premiere par le quarré de la seconde, & du cube de la seconde; donc on aura trouvé les racines de la puissance proposée, si on ôte ces mêmes produits l'un après l'autre des termes semblables de la puissance proposée. Ce que l'on a fait par l'opération, & ce que la regle apprend à exécuter.

EXTRACTION DE LA RACINE QUARRÉE *dont on ne peut avoir la Racine exacte, & que l'on continue à l'infini.*

89. Soit $\sqrt[2]{c^2 - x}$) quantité irrationnelle dont il

faut tirer la racine approchée, on fera l'opération comme si la quantité étoit commensurable.

$$c^2 - x \left\{ c - \frac{x}{2c} - \frac{xx}{8c^3} - \frac{x^3}{16c^5} \right.$$

$2c$ 1er diviseur.

$2c - \frac{x}{c}$ 2e. diviseur.

$2c - \frac{c}{x} - \frac{xx}{4c^3}$ 3e. divis.

1er reste $- \frac{xx}{4cc}$

2e. reste $- \frac{x^3}{8c^4} - \frac{x^4}{64c^6}$

3e. reste $- \frac{5x^4}{64c^6} - \frac{x^5}{64c^8} - \frac{x^6}{256c^{10}}$

On commencera en disant la racine quarrée de c^2 est c qu'il faut écrire à la racine, & effacer le premier terme, & suivant la regle il faut doubler la racine qui sera $2c$ pour être le diviseur, & l'on dira $- x$ divisé par $2c$, donne pour seconde racine $- \frac{x}{2c}$ dont le quarré est $+ \frac{xx}{4cc}$ qu'on doit soustraire, mais comme il n'y a point de termes semblables on change le signe en écrivant $- \frac{xx}{4cc}$, & c'est un reste sur lequel on continue l'extraction en doublant les deux racines trouvées, ainsi que la regle générale le prescrit, on aura donc $2c - \frac{x}{c}$, puis on divisera le premier reste $- \frac{xx}{4cc}$ par $2c$

grandeur proposée. On a coutume de s'arrêter & de négliger ces restes après un nombre suffisant d'opérations.

Remarque.

90. Si la quantité proposée a plusieurs termes il faudra opérer de la même maniere ; il est seulement nécessaire que le premier terme soit une quantité quarrée, mais à la fin de ce Traité on donnera le moyen de tirer la racine indépendamment de cette supposition.

Extraction d'une Racine Cube Imparfaite & continuée à l'infini.

91. Soit $\sqrt[3]{8a^3 - b^2}$) quantité incommensurable dont l'on veut trouver la racine approchée.

$$8a^3 - b^2 \left\{ \begin{array}{ll} 2a - \frac{b^2}{12a^2} & \\ \hline 12a^2 & 1^{er} \text{ diviseur} \end{array} \right.$$

$$\text{reste} - \frac{b^4}{24a^3} + \frac{b^6}{1728a^6}$$

On dira la racine cube de $8a^3$ est $2a$ que vous poserez à la racine ; pour avoir la seconde racine vous diviserez ainsi que la regle l'ordonne $-b^2$ par $12a^2$ qui est le triple du quarré de la premiere, & vous aurez $-\frac{b^2}{12a^2}$ pour la seconde racine, puis prenant le triple de la premiere que vous multiplierez par le quarré de la seconde, vous aurez $6a \times \frac{b^4}{144a^4} = \frac{6ab^4}{144a^4} = \frac{b^4}{24a^3}$; il faut prendre ensuite le cube de cette seconde racine, qui est $-\frac{b^6}{1728a^6}$, & les signes étant changés, vous aurez le premier reste sur lequel on opérera en le divisant

par le triple du quarré des deux premier
avoir une troisiéme racine, &c.

Enfin ces extractions ne différent point
qui sont composées de grandeurs entieres,
avoir égard au Calcul des fractions, c'est to
tention qu'il faut avoir ; il est nécessaire qu
mier terme soit une quantité exactement cub
la méthode que l'on donnera à la fin de ce
ne le suppose pas.

Remarque premiere.

92. Dans le calcul de ces suites, il n'est
différent en commençant l'opération de cho
premier terme celui qu'on voudra, il faut
celui qui donnera les plus petites différenc
qu'on l'a déja fait remarquer dans la suite d
vision infinie (§. 80.), & pour la même rai
aura de cette maniere la valeur la plus app
& elle différera si peu que l'on souhaitera,
tinuant l'opération.

Remarque seconde.

93. Voilà à quoi se réduit le calcul dont
avoir besoin sur ces suites, il suffira de
percevoir comment il faudroit agir pour
calcul de l'expression qui suit.

Soit $\frac{\sqrt[2]{cc + ab)}}{}$ on demande la vale

fractions l'on se borne à un certain nombre de termes. On laisse cet exemple à faire pour s'exercer.

Remarque troisiéme.

94. Lorsqu'une quantité, soit littérale, soit numérique, n'est pas une puissance parfaite, il est impossible qu'aucune suite infinie puisse donner une racine exacte; car dès que la puissance supposée imparfaite n'a pas une grandeur entiere pour sa racine, elle ne pourroit avoir qu'une fraction; or une fraction réduite aux moindres termes & multipliée par elle-même ne peut produire qu'une fraction & jamais une grandeur entiere; car soit $\frac{a}{b}$ une fraction, ou un moindre rappport, son quarré $\frac{aa}{bb}$ qui est doublé n'aura pour exposant qu'une fraction, & non pas un nombre entier, sans quoi s'il étoit nombre entier, il seroit aussi nombre quarré, & alors l'exposant du rapport simple ne seroit plus une fraction, mais un nombre entier, ce qui est contre l'hypotèse. On se contente donc d'en approcher par le moyen des décimales pour les nombres, comme on l'a enseigné, (§ 20.) & par les suites pour les quantités littérales.

DES QUANTITÉS IRRATIONNELLES.

DEFINITION. XI.

95. On a dit qu'une quantité irrationnelle étoit une puissance dont la racine n'est point exacte; ainsi $\sqrt[2]{b}$, ou $\sqrt[3]{ab}$, est une quantité irrationnelle. On a dit encore que ce signe $\sqrt{}$ avoit été inventé pour marquer la racine de la grandeur qui est sous le signe

mettant au haut du ſigne radical un chiffre qui marque le dégré de la puiſſance qu'ou veut extraire; mais on trouve ſouvent des grandeurs numériques ou algébriques qui accompagnent ces ſignes radicaux, de cette maniere : $3\sqrt{ab}$, ou $mn\sqrt{bg}$, ou $\frac{f}{f}\sqrt{bd}$, ou $\overline{b+f-g}\sqrt{abc}$. Ces grandeurs qui accompagnent les ſignes radicaux, ſont cenſées être multipliées par celles qui ſont ſous le ſigne radical.

Avant que d'en venir aux opérations que l'on a coutume de pratiquer ſur ces grandeurs numériques ou littérales qui accompagnent ces ſignes radicaux, il faut expliquer quelques réductions qui ſont déduites de cette définition.

On dit par exemple $\sqrt[2]{9ab} = 3\sqrt{ab}$, parce ce qu'on tire la racine de 9 qui eſt ſous le ſigne radical, & on place 3 qui eſt ſa racine hors du ſigne radical. De même $\sqrt[2]{72a^2d} = 2a\sqrt{18d}$, parce que cette expreſſion peut ſe décompoſer en celle ci $\sqrt[2]{4a^2 \times 18d}$); or il y a ſous ce ſigne une partie du produit qui eſt une quantité parfaite, ſçavoir $4a^2$ dont la racine eſt $2a$; on pourra donc la mettre hors du ſigne radical de cette maniere: $2a\sqrt{18d}$; ainſi ces deux expreſſions $\sqrt{72a^2d}$, & $2a\sqrt{18d}$ ſont égales: la même expreſſion $\sqrt[2]{72a^2d}$ auroit pu ſe changer en cette autre $6a\sqrt{2d}$, parce que $\sqrt[2]{72a^2d}$ peut être décompoſée en celle-ci $\sqrt[2]{36a^2 \times 2d}$) $= 6a\sqrt{2d}$. Il eſt néceſſaire pour faire ces changemens que la quantité qui eſt ſous le ſigne radical puiſſe ſe décompoſer en deux membres dont les produits faſſent la grandeur propoſée, & que l'un des deux ſoit une puiſſance parfaite, comme il eſt facile de le remarquer dans cet exemple & dans celui qui ſuit.

$$\frac{\sqrt{8bbac}}{\sqrt{4ccb}} = \frac{\sqrt{4bb \times 2ac}}{\sqrt{4cc \times b}} = \frac{2b\sqrt{2ac}}{2c\sqrt{b}}$$

S'il arrive au contraire qu'on ait une grandeur numérique ou littérale qui accompagne le signe radical, & qu'on veuille la faire passer sous le signe : on elevera cette quantité à la puissance exprimée par l'exposant du signe radical, comme si l'on a $2c\sqrt{ab}$, on aura $\sqrt{4abcc} = 2c\sqrt{ab}$, en élevant $2c$ au quarré, & on fera ensuite passer $4cc$ sous le signe ; de même $3d\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{27abd^3}$, parce qu'on a élevé $3d$ au cube, il en est ainsi des autres quantités.

Par ces deux changemens, l'un de tirer hors du signe les grandeurs qui sont dessous, & l'autre de les faire passer sous le même signe radical, on simplifie la plûpart des opérations qui se font sur les radicaux, & qu'on trouve dans l'usage de l'Analyse.

De maniere qu'on doit voir que $\sqrt{\frac{bbd}{c}} = b\sqrt{\frac{d}{c}}$ & que $\sqrt{\frac{aab}{cc}} = \frac{a}{c}\sqrt{b}$, & que cette expression $\frac{\sqrt{b}}{c} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{cc}}$, & par conséquent elle est la même que celle-ci $\sqrt{\frac{b}{cc}}$, qu'enfin $\sqrt{\frac{abb}{c} + m)} = b\sqrt{\frac{a}{c} + m)}$, ou $b\sqrt{\frac{a+mc}{c}}$

Addition et Soustraction des Quantités irrationnelles, & qui ont le même signe radical.

Regle pour l'Addition.

96 Ecrivez de suite les grandeurs avec leurs signes, & si elles sont semblables, faites la réduction.

Soit $2a\sqrt{b}$, qu'il faut ajouter avec $3a\sqrt{b}$, on écrira $2a\sqrt{b}+3a\sqrt{b}=5a\sqrt{b}$.

Pour ajouter $b\sqrt{ax}$ avec $a\sqrt{bc}$, on écrira de suite $b\sqrt{ax}+a\sqrt{bc}$, parce que les grandeurs ne sont point semblables.

Régle pour la Soustraction.

97. Ecrivez de suite les grandeurs, en changeant les signes de celles qui doivent être soustraites, & faites la réduction s'il y a des grandeurs semblables.

Soit $3c\sqrt{bd}$, dont il faut soustraire $2c\sqrt{bd}$, on écrira $3c\sqrt{bd}-2c\sqrt{bd}=1c\sqrt{bd}$.

Pour soustraire $-2b\sqrt{ax}$ de $5b\sqrt{ax}$, on écrira $+5b\sqrt{ax}+2b\sqrt{ax}=7b\sqrt{ax}$.

On doit se rappeller qu'il faut changer les signes de la grandeur qui soustrait.

Enfin $3bd\sqrt{mn}$ dont on veut ôter $2f\sqrt{pg}$, on écrira $3bd\sqrt{mn}-2f\sqrt{pg}$.

MULTIPLICATION ET DIVISION des Quantités irrationnelles qui ont le même signe radical.

Régle pour la Multiplication.

98. Multipliez toutes les grandeurs qui composent une des quantités irrationnelles par celles qui composent l'autre quantité irrationnelle, c'est-à-dire multipliez celles qui sont hors du signe radical les unes par les autres, ainsi que celles qui sont dessous le signe radical, & observez la regle des signes + & —, & réduisez le produit total à l'expression la plus simple.

Soit $+2a\sqrt{b}\times+2b\sqrt{c}$, on multipliera les grandeurs qui sont hors du signe, sçavoir $2a$ par $2b$, ce qui donne $4ab$, & celles qui sont sous le signe radical l'un par l'autre, ce qui donne $\sqrt{bc}$; le produit total sera donc $4ab\sqrt{bc}$.

De même $+2a\sqrt{bc}\times-b\sqrt{ab}=-2ab\sqrt{abbc}$, où l'on peut remarquer que bb qui est sous le signe radical est un quarré; on peut donc le retirer du signe radical, & l'on aura $-2ab\sqrt{abbc}=-2abb\sqrt{ac}$ qui lui sera égal.

Soit $a+\sqrt{cd}$.
à multiplier par $b+f\sqrt{dg}$,
on aura $(ab+b\sqrt{cd}+af\sqrt{dg}+f\sqrt{cddg}.)$

Soit $c-\sqrt{c}$
à multiplier par $-bc+\sqrt{d}$
on aura $(-bcc+bc\sqrt{c}+c\sqrt{d}-\sqrt{dc})$

Soit proposé $+\sqrt{\frac{cd}{a}}\times-b\sqrt{\frac{ab}{f}}$, on aura en réduisant $-b\sqrt{\frac{bcd}{f}}$, & si l'on avoit à multiplier $\sqrt{\frac{b}{a}}$ par $\frac{\sqrt{b}}{a}$, on feroit $\frac{\sqrt{b}}{a}=\sqrt{\frac{b}{aa}}$, & l'on auroit en multipliant $\sqrt{\frac{bb}{aaa}}=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}$ en faisant la réduction.

Remarque.

99. Il est évident que si l'on proposoit $\sqrt{aa+bb})$ à multiplier par $\sqrt{aa+bb})$, il suffiroit d'effacer le signe radical & d'écrire $aa+bb$, puisque cette quantité est multipliée par elle-même, le signe radical doit donc s'évanoüir.

Démonstration.

Dans toute multiplication de $a \times b = ab$, on a $1 . a :: b . ab$; donc $\sqrt{1} . \sqrt{a} :: \sqrt{b} . \sqrt{ab}$; donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

Régle pour la Division.

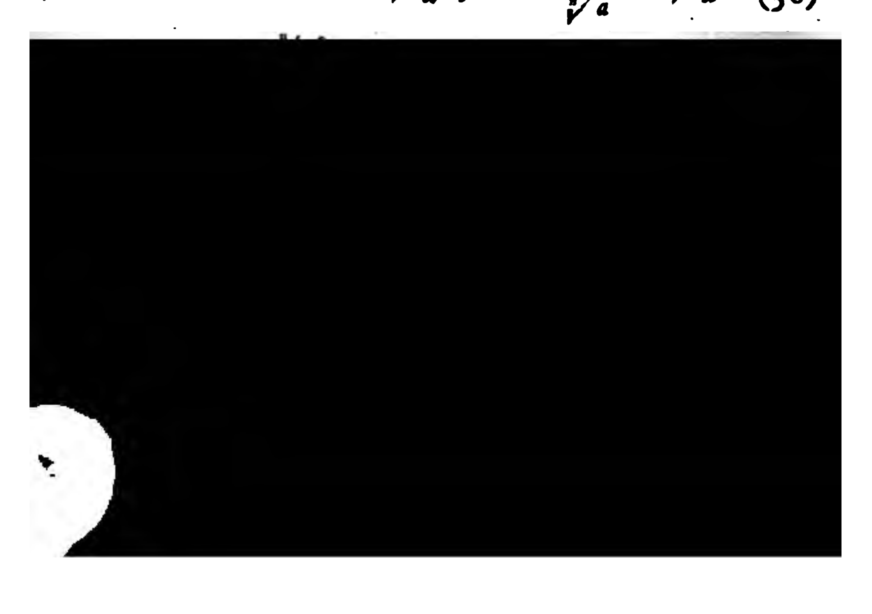
100. Il faut écrire le Dividende au-dessus du Diviseur, & si la Division peut se faire, on agira comme dans les grandeurs rationnelles, on aura pareillement égard aux signes + & — qui accompagnent les radicaux.

Soit $\sqrt{b}$ à diviser par $\sqrt{c}$, on écrira $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$.

Soit $\sqrt{ab}$ à diviser par $-\sqrt{ac}$, on écrira $-\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ac}} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$, en effaçant ce qui se détruit, & donnant le signe — au quotient.

De même $ac\sqrt{bc}$ à diviser par $a\sqrt{b}$, on écrira $\frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{1}} = c\sqrt{c}$ par réduction.

Enfin $\frac{12ac\sqrt{dc}}{4c\sqrt{bc}} = \frac{3a\sqrt{d}}{\sqrt{b}}$, & pour diviser une quantité qui viendroit sous cette expression $\frac{a}{\sqrt[n]{a}}$, on fera $a = \sqrt[n]{a^n}$, on aura $\frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a^{n-1}}$ (38)



Remarque pour le Calcul des Radicaux.

101. S'il arrive que les exposans des radicaux ne soient pas les mêmes comme $\sqrt[2]{bf}$, & $\sqrt[3]{ad}$, & qu'on propose de les multiplier ou diviser, on ne peut le faire qu'on n'ait donné auparavant les mêmes exposans aux signes radicaux, ce qu'on fait de cette maniere.

Régle.

Multipliez les exposans l'un par l'autre, & élevez la puissance de l'un au dégré marqué par l'exposant de l'autre; ainsi $\sqrt[2]{b}$ & $\sqrt[3]{c}$ qui ont des exposans différens étant proposées, si l'on multiplie les exposans des signes radicaux l'un par l'autre, on aura $2 \times 3 = 6$, & on élevera $\sqrt[2]{b}$ à la troisiéme puissance, c'est-à-dire au dégré indiqué par l'exposant de l'autre signe radical, & il viendra $\sqrt[6]{b^3} = \sqrt[2]{b}$, pareillement $\sqrt[3]{c}$ étant élevée au quarré, on aura $\sqrt[6]{cc} = \sqrt[3]{c}$, par conséquent $\sqrt[6]{b^3} \times \sqrt[6]{cc} = \sqrt[6]{b^3cc}$, ce qui fait rentrer dans la regle génerale.

S'il falloit diviser des grandeurs incommensurables qui n'eussent pas le même signe, il faudroit commencer par faire cette préparation, puis opérer comme lorsque les grandeurs ont le même signe; c'est pourquoi $\sqrt[2]{b}$ étant divisée par $\sqrt[3]{c}$, on aura après la préparation $\frac{\sqrt[6]{b^3}}{\sqrt[6]{cc}}$; il en est ainsi des signes radicaux qui peuvent avoir des exposans plus élevés, & renfermer des quantités plus composées.

Démonstration.

Ces expressions $\sqrt[2]{b}$, ou $\sqrt[6]{b^3}$ sont égales; car $\sqrt[2]{b} = b^{\frac{1}{2}}$ (44); de même $\sqrt[6]{b^3} = b^{\frac{3}{6}} = b^{\frac{1}{2}}$, donc, &c.

Remarque sur les radicaux complexes.

102. Cette derniere Remarque, va servir [illegible] entendre quelques réductions que l'on fait sur [illegible] radicaux, & qui sont un peu plus composées [illegible] les précédentes.

Soit proposé à réduire au même exposant les [illegible] dicaux $a\sqrt[2]{cc-dd})$ & $b\sqrt[3]{ab+dd})$ on multipliera suivant la regle les exposans des radicaux l'un [illegible] l'autre, ce qui donne 6 pour l'exposant radical, puis on élevera la premiere racine au cube, & [illegible] seconde au quarré; on aura donc $a\sqrt[2]{}$ [illegible] $a\sqrt[6]{\overline{cc-dd}^3})$ pareillement $b\sqrt[3]{ab+dd}$ [illegible] $b\sqrt[6]{\overline{ab+dd}^2})$.

Si on éleve ces grandeurs aux puissances marquées par leurs exposans, on doit appercevoir qu'elles pourront être multipliées, ou divisées l'une par l'autre. On rentrera de cette maniere dans la regle générale.

Si on proposoit de réduire une grandeur complexe telle que celle qui est sous ce signe radical $a\sqrt[6]{(ccb^2-2cb^3+c^4)}$ on remarquera que la grandeur qui est sous ce signe radical, est le quarré de $cb-cc$; donc si l'on tire la racine quarrée de cette grandeur complexe, il faudra diviser l'exposant du signe radical par 2, & on aura alors $a\sqrt[3]{cb-cc})$ $= a\sqrt[6]{(ccb^2-2cb^3+c^4)}$. La démonstration de l'égalité de ces deux expressions, ainsi que celle de ses semblables plus ou moins composées, suit de ce que $\sqrt[6]{a^4} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{a^2}$ (§. 44.)

On

On pourroit pousser plus loin la théorie du calcul des radicaux, ou des grandeurs irrationnelles; mais ce qu'on vient d'en donner suffit pour un abrégé tel que celui-ci : les personnes curieuses d'approfondir cette matiere trouveront de quoi se satisfaire dans les nouveaux *Éléments d'Algebre* ou *du Calcul Littéral* que M. *le Blond*, Maître de Mathématique des Enfants de France, vient de mettre au jour en un volume *in*-8°.

Fin de l'Algebre ou Calcul Littéral.

ARITHMÉTIQUE PALPABLE.

Par le Docteur SAUNDERSON.

C'EST une chose aussi merveilleuse que certaine, que le savant & ingénieux Docteur Saunderson, feu Professeur Lucasien pour les Mathématiques dans l'Université de Cambrigde, malgré son aveuglement, ait été capable cependant de faire des calculs arithmétiques & algébriques fort longs & très compliqués. Cela paroît sans contradiction par son chef-d'œuvre d'algebre qu'on vient d'imprimer, & par les autres monuments indubitables qui existent encore. Il avoit inventé pour son usage une façon de marquer très commode pour les longs calculs & les nombres considérables, qu'il savoit exprimer sur une planchette, ou table à calculer, avec laquelle il pouvoit faire

aisément toutes les opérations de l'arithmétique, par le seul sens du toucher, ce qui fait que nous l'appellons *Arithmétique palpable*. Comme par le moyen de Madame Saunderson j'eus la facilité de voir & d'examiner divers modeles de cette espece d'arithmétique, qu'il avoit par bonheur perfectionnée avant sa mort, quoiqu'il n'eût laissé aucun éclaircissement là-dessus qui puisse servir à découvrir sa méthode, j'ai cependant eu la curiosité de me proposer à moi-même de déchiffrer, pour ainsi dire, ses modeles; heureusement j'en suis venu à bout. Comme d'autres pourroient avoir la même curiosité, & que d'ailleurs cette méthode peut être d'une grande utilité aux personnes qu'un pareil malheur mettroit dans le même cas, j'en donnerai une description exacte & succincte.

La table calculatoire étoit une planche d'un bois mince & poli, un peu plus grande qu'un pied en quarré : elle étoit élevée sur un petit chassis ou pied, de façon qu'on en pouvoit toucher également le dessus & le dessous. Cette planche étoit divisée par un grand nombre de lignes paralleles à égale distance, & par un pareil nombre d'autres faisant un angle droit avec les premieres. Les bords de cette table étoient divisés par des entailles, environ à la distance d'un demi pouce l'une de l'autre, & chaque entaille comprenoit cinq des paralleles susdites, de façon que chaque pouce quarré étoit divisé en cent petits quarrés. A chaque point d'intersection la planche étoit percée par de petits trous capables de recevoir une épingle. C'étoit par le secours de ces épingles, fichées jusqu'à la tête dans ces trous, qu'il exprimoit ses nombres. Il employoit deux sortes d'épingles, des grosses & des petites, au moins leur tête étoit-elle diffé-

rente, & pouvoit aiſément ſe diſtinguer par le toucher. Toutes les pointes de ces épingles étoient coupées, & il en avoit une grande proviſion dans deux boîtes qu'il avoit toujours à côté de lui quand il calculoit. Tels étoient, ſes inſtruments dont nous allons préſentement faire voir l uſage.

Pour cet effet nous obſerverons d'abord que chaque figure numérale avoit ſur cette table ſon petit quarré particulier, conſiſtant en quatre de ces petits quarrés contigus dont nous venons de parler, leſquels par conſéquent laiſſoient un petit intervalle entre chaque figure; & ces figures numérales étoient de différente valeur, ſuivant la différente groſſeur, ou la poſition d'une ou de deux épingles, dont elles étoient toujours compoſées. Dans cette intention il avoit imaginé l'analogie ou façon de marquer ſuivante, qu'il obſervoit toujours ſoigneuſement. Fig. 1re.

Une groſſe épingle dans le centre du quarré (elle ne ſe plaçoit jamais ailleurs que dans chaque centre) marquoit toujours un zéro, ou o; c'eſt pourquoi je l'appellerai dorénavant ainſi. Son principal emploi étoit pour conſerver l'ordre & l'égalité de diſtance entre chaque rang de chiffres. Ce zéro étoit toujours préſent, excepté dans le ſeul cas de l'unité. Alors pour l'exprimer on ôtoit la groſſe épingle du centre, & l'on y en ſubſtituoit une petite. Pour le 2, on remettoit d'abord le zéro à ſa place & l'on plaçoit la petite épingle préciſément au-deſſus du zéro. Pour le 3, le zéro reſtoit à ſa place, & l'on avançoit la petite épingle à droite dans l'angle ſupérieur. Pour le 4, la petite épingle deſcendoit, & ſe plaçoit juſtement vis-à-vis du zéro à droite. Pour le 5, la petite épingle deſcendoit, & étoit placée à l'angle d'en bas, toujours à Fig. 2.

droite. Pour le 6, la petite épingle reculoit à gauche, & venoit se placer perpendiculairement sous le zéro. Pour le 7, la petite épingle reculoit encore à gauche, & se plaçoit dans l'angle inférieur. Pour le 8, la petite épingle remontoit, & se mettoit justement vis-à-vis du zéro à gauche. Pour le 9 enfin, la petite épingle remontoit encore jusqu'à l'angle supérieur du zéro, toujours à gauche. C'est ainsi qu'il arrangeoit ses chiffres par une façon de marquer uniforme & naturelle, qui pouvoit fort bien s'apperçevoir & se distinguer au toucher; & pour faire comprendre plus distinctement l'arrangement de ces chiffres, je les ai représentés dans la figure premiere & dans la seconde.

De cette maniere il pouvoit coucher par écrit (pour ainsi dire) sur sa table quelque nombre que ce fût; & en promenant légérement ses doigts dessus, il pouvoit y lire aisément, & connoître ce qui y étoit représenté. Les grosses épingles ou zéro qui restoient toujours au centre de chaque quarré, assez proches & à égale distance les unes des autres, étoient des guides surs qui servoient à le conduire le long de chaque rang, en assuroient les limites, & prévenoient la confusion qui sans cela auroit pu survenir parmi les chiffres. Comme trois paralleles perpendiculaires suffisoient pour chaque chiffre, de même trois paralleles horizontales suffisoient pour un rang de chiffres, & les trois audessous pour un autre rang, & ainsi de suite, sans aucun danger de s'embrouiller.

Présentement il n'est pas difficile de concevoir comment il pouvoit avoir plusieurs rangs de chiffres en même temps sur sa table, l'un dessous l'autre, ou comment il pouvoit faire dériver un nombre d'un autre; en un mot, comment il pouvoit

faire tous les calculs néceſſaires, en changeant ſes épingles de place, ce qu'il faiſoit avec une adreſſe & une facilité ſi grande, que cela cauſoit une ſurpriſe agréable à ceux qui le regardoient. On dit même qu'il pouvoit quitter au milieu d'un calcul trop long, & s'y remettre quand il lui plaiſoit, & qu'il en apperçevoit tout d'un coup les conditions en promenant les doigts ſur ſa table. Voici un expédient fort naturel qui auroit pu lui abréger beaucoup ſes opérations, ſur-tout dans les grands calculs, c'eſt pourquoi je ne doute nullement qu'il n'y ait eu ſouvent recours. C'eſt de préparer ſa table avant d'opérer, (ce qu'il pouvoit faire faire par tout autre que lui,) en rempliſſant chaque troiſieme trou, de trois en trois lignes, avec une groſſe épingle ou zéro; alors quand il vouloit travailler, il n'y avoit pas autre choſe à faire que de déterminer chaque chiffre en ajoutant une petite épingle dans l'endroit convenable; il n'y avoit (comme l'on a dit) que le ſeul cas de l'unité à exprimer, qui pouvoit l'obliger alors de changer la groſſe épingle, ou zéro, en un petite, pour marquer cette unité.

Les modeles de cette arithmétique que j'ai examinés & réduits aux chiffres ordinaires, ſont aſſurément des tables arithmétiques qu'il avoit calculées, & qu'il conſervoit pour ſon uſage. Mais de ſavoir à quel deſſein elles ont été faites, c'eſt ce qu'ils n'eſt pas aiſé de découvrir. Elles paroiſſent avoir beaucoup de rapport avec les tables des ſinus naturels, tangentes & ſécantes; mais je laiſſe aux recherches des curieux de trouver leur véritable uſage. Ce ſont quatre pieces, d'un bois ſolide de la forme d'un parallélipipede rectangle, chacune longue environ de 11 pouces, de 5 & demi de

Fig. 3.

large, & d'un peu plus d'un demi-pouce d'épais. Les deux côtés opposés de chaque piece étoient divisés par des petits quarrés, suivant la méthode de la table décrite ci-dessus; mais elles n'étoient trouées que dans les places nécessaires où les épingles étoient enfoncées à demeure jusqu'à la tête. Chaque face représentoit neuf petites tables arithmétiques de 10 rangs de chiffres chacune, & chaque rang de chiffres, pour l'ordinaire, contenoit cinq figures ou chiffres. Pour faire plaisir aux curieux, j'ai dessiné en grand une de ces petites tables comme je l'ai trouvée, avec l'interprétation que je lui donne. Voyez la figure 3.

Mais outre l'usage arithmétique de cette table, qui étoit sans contredit sa premiere & sa principale destination, il s'en servoit encore pour décrire de fort belles figures géométriques, qui consistoient en plusieurs lignes droites qui s'entrecoupoient à divers endroits, comme j'en ai vu quelques exemples. Il avoit deux façons de les tracer, soit en mettant les épingles sur les lignes, pour en représenter la figure, soit par des épingles placées seulement aux intersections de chaque ligne. Alors entortillant un brin de fil ou de soie autour de la tête de l'épingle, il pouvoit aisément représenter avec ce fil les lignes suivant son intention. S'il avoit aussi des lettres palpables, semblables à peu près aux caracteres d'imprimerie, pour distinguer les différents points angulaires, & pour lui aider dans la démonstration des propriétés de ces figures, c'est ce qu'on ne peut savoir à présent. S'il avoit eu besoin de pareils secours, son génie fertile y auroit aisément suppléé. Il n'est pas difficile de concevoir pareillement comment il pouvoit aussi se servir de la même table pour repré-

senter toutes sortes d'équations algébriques, & pour réduire ces équations, principalement en se servant des caracteres dont je viens de parler, ou de quelque chose de semblable. Il pouvoit avoir des caracteres dans la façon de ces épingles pour les signes ordinaires de l'algebre, & pour placer dans chaque opération. Ainsi cette table auroit ressemblé assez bien à une forme d'imprimerie, & je ne doute pas qu'il n'ait pu la lire par le seul toucher, pour peu qu'il eût voulu s'y appliquer. On m'a assuré qu'il connoissoit ses lettres, & qu'il savoit épeler, de façon qu'il distinguoit les figures de chaque lettre, soit capitale, soit petite, & même qu'il s'amusoit quelquefois pour son plaisir, quand il en trouvoit l'occasion, à lire les épitaphes sur les tombeaux, avec ses doigts.

On l'a souvent entendu regretter de ne s'être point appliqué à apprendre à écrire dans sa jeunesse, & il assuroit qu'il auroit pu aisément y réussir. On ne trouvera plus ceci incroyable, quand on saura qu'on l'a vu souvent porter son jugement aussi certainement sur la bonté d'un instrument de mathématique, & sur la justesse des divisions, en l'examinant seulement par le toucher, que les yeux les plus clairvoyants auroient pu le faire, jusques là qu'on venoit ordinairement le consulter là-dessus. Enfin on ne peut plus douter qu'il ne fût capable de traiter toutes les especes d'équations, & les calculs les plus compliqués, avec beaucoup d'adresse & de capacité ; mais je n'entreprendrai point de déterminer jusqu'à quel point il pouvoit se reposer sur la force de son imagination (qui certainement étoit bien grande), & comment il avoit recours aux inventions méchaniques à mesure qu'il en avoit besoin.

De tout ce que je viens de décrire, & de plusieurs autres ingénieuses inventions de pareille nature que j'ai vues, je conclurai par cette observation générale, que comme la connoissance & l'usage des symboles (ou des signes sensibles & arbitraires de nos idées intellectuelles) est d'une grande importance, & a beaucoup d'étendue dans toutes les parties des mathématiques, il avoit inventé de nouvelles especes de symboles mathématiques, inconnus & inouis jusqu'à présent, qui s'accommodoient particuliérement au besoin qu'il en avoit, suivant les circonstances. Les symboles sensibles communément reçus & en usage pour représenter les idées mathématiques, & pour les rapporter à notre imagination, ou à celle des autres, sont dérivés de nos deux sens principaux, la vue & l'ouie, & sont (pour m'exprimer plus facilement) audibles ou visibles. Il est vrai qu'il pouvoit faire usage des premiers & acquérir beaucoup de connoissances par leur moyen, en conversant avec les autres, & principalement en écoutant la lecture des meilleurs Auteurs en mathématiques; mais il étoit entiérement privé du secours des derniers (je veux dire des symboles visibles) dont cependant nous trouvons l'usage si indispensable & si nécessaire, que c'est le seul moyen qui nous sert à acquérir la plus grande partie de nos connoissances en mathématique.

Qu'a-t-il donc fait pour surmonter cet obstacle qui nous paroît invincible, & pour satisfaire au desir violent qu'il ressentoit d'acquérir ces connoissances? Il eut recours à un autre sens qu'il possédoit parfaitement, & substitua le toucher à la place de la vue, en inventant une nouvelle espece de symboles mathématiques que nous pouvons

appeller *palpables* ou *ſenſibles.* Il s'en ſervoit pour rapporter les idées mathématiques à ſon entendement, puiſque l'entrée leur étoit refuſée du côté des yeux. Ainſi par le moyen de ces ſymboles imparfaits & différents, ſuivant les beſoins qu'il en avoit, & par le ſecours d'une vive conception, & d'une perſévérance obſtinée, il fit des progrès admirables dans cette ſcience. Voilà les inſtruments (ſi peu convenables en apparence) avec leſquels il rapportoit à ſon imagination les plus difficiles & les plus ſublimes idées des mathématiques, & avec leſquels il s'étoit rendu capable d'en déduire les applications les plus convenables & les plus utiles.

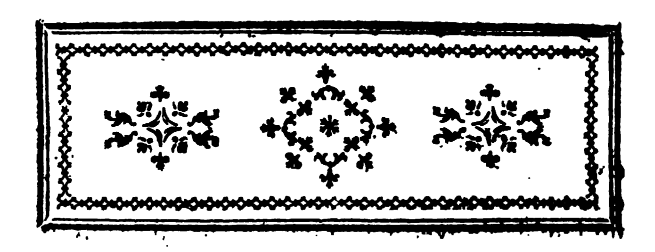
Nous devons donc avouer de bonne foi, nous qui jouiſſons de la vue & de l'entendement, que tout ceci nous paroît bien extraordinaire & merveilleux. Pour moi, je ne puis me le repréſenter durant le cours de toutes ſes études, que comme un génie vraiment mathématicien qui ſe roidiſſoit contre les plus grands obſtacles, & qui, en ſe paſſant des ſecours ordinaires que la nature lui avoit refuſés, fit le plus rude apprentiſſage, capable de décourager tout autre que lui dans ſes études. Mais par une heureuſe ſagacité & une induſtrie opiniâtre, à chaque difficulté qu'il rencontroit, il trouvoit des expédients pour la ſurmonter. Il étoit réſolu, non à abondonner leur pourſuite, mais à perſiſter avec conſtance juſqu'à ce qu'il devînt ſupérieur à ces obſtacles, pour ſatisfaire à l'ambition démeſurée qu'il avoit de tenir le premier rang parmi les mathématiciens.

Remarque.

M. Saunderſon étoit [illegible]

d'Yorck ; il eut le malheur de perdre entiérement la vue par la petite vérole, à l'âge d'un an. Malgré cet accident, il vint à bout par la force de son génie de faire des progrès si étonnants dans les mathématiques, qu'on le trouva digne d'occuper la chaire de Professeur de Mathématiques dans l'Université de Cambrigde. Il a composé des Eléments d'algebre en Anglois, en deux volumes *in*-4°, qui y furent imprimés en 1741, quelques années après sa mort, aux dépens de l'Université. Ce petit traité d'*Arithmétique palpable*, qui en est extrait, est écrit par le Professeur qui lui succéda, & qui fut chargé de l'édition de son ouvrage.

Fin de l'Arithmétique palpable.



ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

DÉFINITION I.

1. LA *Géométrie* eſt la ſcience de l'étendue qu'occupent les corps, & de leurs propriétés, ſelon leurs trois dimenſions ; *longueur*, *largeur*, & *profondeur*.

On appelle *Matiere* ou *Corps* tout ce qui a des parties unies les unes aux autres.

DÉFINITION II.

2. La *Ligne* eſt la longueur conſidérée ſans égard à la largeur & à la profondeur. Le commencement & la fin de la ligne ſe nomment *Point*. Dans la Géométrie le point eſt une portion de matiere conſidérée comme n'ayant point de parties, ou comme *indiviſible* ; car autrement on le conſidéreroit comme une ligne qui auroit auſſi ſon commencement & ſa fin. La ligne eſt la trace que laiſſeroit après lui un point qui iroit de A en B. *Planche I. Fig.* 1.

Remarque.

3. Ce n'est pas sans raison que les Géometres considerent le point comme tellement indivisible, que loin qu'un homme soit capable d'en former un semblable avec aucun instrument, il ne puisse pas même l'imaginer. C'est afin qu'on ne considere pas l'extrémité d'une ligne comme une de ses parties ; car dans la Géométrie pratique il faut bien se garder de le penser ainsi.

DÉFINITION III.

4. La *Ressemblance* est cette identité des parties par lesquelles une chose se distingue d'une autre.

Remarque.

5. Supposons qu'ayant deux choses A & B absolument semblables, vous les considériez avec attention l'une & l'autre en particulier. Vous remarquerez exactement tout ce qu'on peut observer dans la chose A, & vous écrirez vos observations. Après en avoir fait autant de B, comparez tout ce que vous avez remarqué, & vous trouverez absolument la même chose, si vous en exceptez cependant la quantité qu'on ne peut ex-

DÉFINITION IV.

7. On nomme *Ligne droite* A B, celle dont chaque partie est semblable au tout, & qui est le plus court chemin d'un point A à un point B. Elle a ses parties également posées entre ses extrémités, & est unique, parceque d'un point à un autre point il ne peut y avoir deux plus courts chemins. La *Ligne courbe* C D est celle dont les parties ne ressemblent pas au tout, & qui ne sont pas posées également entre ses extrémités. Il y en a de *régulieres* & d'*irrégulieres*; la premiere se conduit toujours du même sens, & non pas la seconde C D.

Pl. I. Fig. 1.

Remarque premiere.

8. La ligne droite se tire sur le papier avec une plume, un crayon, un pinceau, &c. en suivant la regle donnée pour les points. On la tire sur le bois ou la pierre avec un fil frotté de craie ou de charbon. Pour marquer une ligne droite sur la terre, on plante deux bâtons, & on la tire de l'un à l'autre. On connoît qu'elle est droite, en plantant sur la même ligne un troisieme bâton entre les deux autres; parcequ'alors appliquant un œil devant le premier, il doit empêcher de voir les autres; car si on en apperçoit plus d'un, la ligne n'est pas exactement droite.

Remarque seconde.

9. Pour mesurer une ligne on se sert d'une longueur déterminée, par exemple, d'une *toise*, que l'on divise en pieds, le pied en pouces, le pouce en lignes, &c. Et comme la mesure est arbitraire, on conçoit aisément qu'elle n'est pas la même dans tous les pays.

Remarque troisieme.

10. Il faut encore bien faire attention que la division de la perche, de la toise, pied, &c. est différente selon les provinces, royaumes, & même les villes. Le pied de Roi est ordinairement divisé en douze parties, & la mesure géométrique n'est divisée qu'en dix.

DÉFINITION V.

Pl. I. Fig. 2.

11. La définition de la ligne courbe est connue de tout le monde. Le *Cercle* se fait en conduisant une ligne droite en rond autour & à égale distance du point fixe C.

Remarque.

12. On se sert d'un instrument qu'on nomme *compas*, pour marquer un cercle sur du papier. Quand on veut le figurer sur la terre, & dans toutes les occasions où l'on ne peut user de l'ouverture du compas, on se sert d'un fil, d'une ficelle ou d'une perche, attachés par un bout à un point fixe qui sert de centre.

DÉFINITION VI.

Pl. I. Fig. 2.

13. On nomme *Centre* du cercle le point C, parceque tous les points de la circonférence A, D, F, G, E, en sont également éloignés (§. 11.) La ligne droite C A se nomme le *demi-diametre* ou le *rayon*: la ligne qui commence au point D de la circonférence & finit à l'autre point de la circonférence E, en passant par le centre C, se nomme *Diametre*; & toute autre ligne qui, prenant naissance à un point de la circonférence, va

finir à un autre point, sans passer par le centre, se nomme *corde* ou *sous-tendante*.

Remarque.

14. On divise la circonférence de quelque cercle que ce soit en 360 parties égales, qu'on nomme *Degrés*, parceque ce nombre peut être facilement & exactement divisé par beaucoup d'autres, comme 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, &c. On divise ensuite chaque degré en 60 *minutes*, & chaque minute en 60 *secondes*. On désigne ordinairement les degrés par (°), les minutes par ('), & les secondes par (''): par exemple, 3° 25' 17''; cela veut dire 3 degrés 25 minutes & 17 secondes: ou bien 3° toises 2' pieds 4'' pouces 5''' lignes.

DÉFINITION VII.

15. Lorsque deux lignes AB & AC, s'inclinant l'une vers l'autre, se coupent en un point A, on appelle *angle* l'espace qui se trouve entre ces deux lignes.

Pl. I. Fig. 3.

Remarque.

16. On marque cet angle par une seule lettre A; ou, pour éviter la confusion, & le distinguer des autres angles, on le marque quelquefois avec les trois lettres BAC, en sorte que A affecté au *sommet* ou *pointe* de l'angle, tienne le milieu entre B & C. La grandeur de l'angle se mesure par un petit arc fait avec un compas ouvert à volonté, dont on met une jambe au point A comme & l'on conduit l'autre, par exemple, de On dit donc que l'angle est d'autant de de l'arc DE en contient, ce l'on mesure

demi-cercle de laiton ou autre matiere, auquel on donnne aussi le nom de *rapporteur*.

DÉFINITION VIII.

17. La *Ligne perpendiculaire* est celle qui en coupe une autre à angles droits, c'est-à-dire, de façon que les angles qu'elle forme de part & d'autre soient égaux. Ainsi l'on connoît que la ligne AB est perpendiculaire à la ligne CD.

DÉFINITION IX.

Pl. I. Fig. 4. 18. L'angle ABC, formé par la perpendiculaire AB & la ligne BC, s'appelle *angle droit* (§. 17), Fig. 4. Tout angle E plus petit que le droit se nomme *angle aigu*, Fig. 5; & tout autre angle plus grand que le droit, comme seroit F, se nomme *angle obtus*, Fig. 6.

DÉFINITION. X.

Fig. 7. 19. L'angle A fermé par la ligne droite BC, se nomme *Triangle*. Lorsqu'un des trois angles de ce triangle est droit, comme A, on le nomme *Triangle Rectangle*. Lorsqu'un des trois est obtus, (Fig. 8.) comme O, on l'appelle *Ambligone* ou *Obtus-angle*; & lorsque tous trois sont aigus, il se nomme *Oxigone* ou *Acutangle*. (Fig. 9.) Si les trois côtés sont égaux, on le nomme *Equilatéral*; (Fig. 10.) s'il n'a que deux côtés égaux AB & BC, on l'appelle *Equijambe*, ou *Isoscele*; (Fig. 11.) si aucuns des côtés ne sont égaux entre eux, comme HTK, il se nomme *Triangle Scalene*.

Fig. 9. La *base* d'un triangle est le côté sur lequel on abaisse une perpendiculaire de l'angle opposé B. Cette perpendiculaire se nomme *Hauteur du triangle* par rapport à sa base. Les deux parties de la base

base divisée par la perpendiculaire se nomment *Segments de la base*.

On appelle aussi *base* le plus grand côté d'un triangle rectangle ; savoir celui qui est opposé à l'angle droit. Il se nomme plus communément *Hypothenuse*. Dans le triangle isoscele, on prend ordinairement pour base le côté inégal aux autres.

DÉFINITION XI.

20. Le *Quarré* est une figure dont les quatre côtés A B, BC, CD, DA, sont égaux & forment des angles droits. Le *Rectangle* ou *Quarré long* est celui dont tous les angles sont droits, mais dont les deux côtés opposés seulement sont égaux, comme E H & F G, & les deux autres plus petits, E F & H G. Le *Rhombe* ou *Losange*, en terme de Blâson, a les quatre côtés IK, KL, LM, MI égaux, & les angles obliques. Le *Rhomboïde* a les quatre angles obliques ; mais il n'a de côtés égaux que les deux opposés O N & P Q, QN & O P.

Pl. 1. Fig. 12. Fig 13. Fig. 14. Fig. 15.

On nomme *Trapeze* le *Quadrilatere*, ou figure à quatre côtés, mais dont aucun n'est égal avec les autres, comme STVZ. On donne enfin le nom de *Trapézoïde* à la figure quadrilatere, dont deux des côtés opposés sont paralleles entre eux, comme E F & G H.

Fig. 16. Fig. 17.

DÉFINITION XII.

21. Toutes les autres figures qui ont plus de quatre côtés se nomment *Polygones*, & prennent des noms particuliers selon la quantité déterminée qu'ils en ont ; *Pentagones*, s'ils en ont cinq égaux ; *Exagones*, s'ils en ont six ; *Eptagones*, quand ils en ont sept ; *Octogones*, s'ils en ont huit ; *Endécagones*, s'ils en ont neuf ; & *Dodécagones*, s'ils

Fig. 18.

Pl. I. Fig. 18. ont douze côtés. Quand tous les angles d'un polygone sont égaux, comme dans l'*Exagone* AB CDEF, on le nomme *Polygone régulier*, ou figure réguliere; si au contraire les côtés & les angles ne sont pas égaux, on l'appelle *Polygone irrégulier*, comme le Pentagone GHIKL.

Fig. 19.

Définition XIII.

Fig. 10. 22. On nomme *Paralleles* deux lignes AB & CD, qui, quelque longueur qu'elles aient, sont toujours également distantes l'une de l'autre.

Définition XIV.

23. Le *Parallélogramme* est une figure de quatre côtés, dont les deux opposés sont paralleles entre eux, comme le quarré, le rhombe, &c. Quand les angles d'un parallélogramme sont droits, on l'appelle *parallélogramme rectangle*, ou simplement *rectangle*.

Fig. 12.

La *Base d'un parallélogramme* est le côté sur lequel on lui a tiré, de l'un de ses deux angles opposés, une perpendiculaire qu'on appelle *hauteur du parallélogramme* par rapport à sa base IM, où l'on voit que la perpendiculaire tombe en dehors en LO, & qu'elle tomberoit en dedans si on l'avoit tirée de l'angle K.

Fig. 14.

Axiome I.

24. Entre deux points il ne peut y avoir qu'une seule ligne droite.

Corollaire I.

25. Deux lignes droites ne peuvent donc renfermer un espace ou une étendue, parcequ'elles

doivent se réunir aux deux points de leurs extrémités.

Corollaire II.

26. Par conséquent dans tous triangles, deux côtés pris ensemble, comme AB & BC, sont plus grands que le troisieme AC. Pl. I. Fig. 7. 8. 9. 10.

Axiome II.

27. Tous les rayons d'un cercle sont égaux entre eux. (§. 13.)

Axiome III.

28. Les arcs DE & BC, & tous les autres renfermés entre les jambes de l'angle AB & AC, & qui ont pour centre le sommet de l'angle A, ont la même quantité de degrés. Fig. 21.

Corollaire.

29. Puisque la grandeur de l'angle A se mesure par le nombre des degrés de l'angle DE ou BC, (§. 16.) quand on voudra donc mesurer un angle, soit grand ou petit, il suffira de faire un arc semblable à DE ou BC. Fig. 21.

Axiome IV.

30. Les lignes droites, & les angles qui se couvrent mutuellement, sont égaux : & s'ils sont égaux, ils se couvriront.

Axiome V.

31. Les figures qui se couvrent mutuellement, sont semblables & égales : & celles qui sont égales & semblables se couvrent mutuellement (§. 4.)

Remarque.

32. Il faut bien obſerver que, pour que deux figures ſoient égales, elles doivent ſe couvrir mutuellement : car quoique de deux grandeurs miſes l'une ſur l'autre, celle de deſſus couvre celle de deſſous; ſi la grandeur de deſſous, renverſée ſur celle de deſſus, ne pouvoit la couvrir exactement, elles ne ſeroient pas égales; ainſi deux grandeurs doivent avoir préciſément la même figure & les bords de même étendue pour pouvoir ſe couvrir mutuellement.

Axiome VI.

33. Si deux figures ou lignes ſont formées ou décrites de la même maniere, & par de ſemblables moyens & de ſemblables inſtruments, ces figures ou lignes ſont ſemblables entre elles (§. 4.)

Corollaire.

34. Tous les points (§. 2 & 4.) & les lignes droites étant ſemblables entre elles (§. 7.), & le cercle étant formé par une ligne droite tournée en rond autour d'un point (§. 11.), tous les cercles & leurs circonférences doivent être ſemblables quant à la figure.

Corollaire.

37. Si du centre C on éleve une perpendiculaire CD, les angles *o* & *x* seront égaux entre eux : (§. 17.) le quart d'un cercle, c'est-à dire 90°, (§. 16, 36.) est donc la mesure d'un angle droit, & par conséquent tous les angles droits sont égaux entre eux (§. 35.), & un angle égal à un droit, est un angle droit (§. 35.) Pl. I. Fig. 22.

Théorême I.

38. Les deux angles *x* & *o*, formés par la ligne perpendiculaire DC appuyée sur la ligne AB, pris ensemble, font 180°. Fig. 22.

Démonstration.

On peut décrire un demi-cercle du point C sur la ligne AB (§. 36.) : le demi-cercle est donc la mesure de la somme des angles *x* & *o* (§. 16.), qui feront par conséquent 180°, puisque le cercle entier est composé de 360°. Fig. 22.

Corollaire.

39. Si nous avons donc un angle inaccessible à mesurer dans un champ, ou un angle obtus, avec un quart de cercle on mesure alors l'angle de suite qu'il faut leur substituer. Fig. 24.

DÉFINITION XV.

Si l'on prolonge l'un des côtés CB d'un angle CBA au-delà du sommet B en E, l'angle ABE fait par le prolongement BE avec l'autre côté AB, & l'angle ABC, se nomment *Angles de suite*.

Et si l'on prolonge aussi l'autre côté AB en H; l'Angle ABC & l'angle HBE se nomment *Angles opposés au sommet*, ou *verticaux*.

Théorême II.

Pl. I. Fig. 25. 40. Si la ligne droite AB coupe l'autre CD au point u, les angles *verticaux* o & x sont égaux.

Démonstration.

$o + u = 180°$, & $u + x = 180°$ (§. 38.); donc $o + u = u + x$ (§. 22. Arithm.) & par conséquent $o = x$ (§. 28. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

Fig. 25. 41. Si nous avons donc un angle à mesurer dans un champ ou ailleurs, au lieu de mesurer x qui peut-être seroit inaccessible, il faudra seulement mesurer l'angle vertical o, parceque les angles *opposés au sommet* sont égaux.

Théorême III.

Fig. 26. 42. Tous les angles dont la pointe ou sommet est au point C, pris ensemble, sont égaux à quatre angles droits, ou, ce qui est le même, à 360°.

Démonstration.

Le cercle entier est la mesure des angles énoncés dans le Théorême (§. 11. 16.) : si on les prend donc tous ensemble, ils contiendront les quatre angles droits qui font le cercle entier (§. 37), ou 360° (§. 14.)

Problême I.

43. Mesurer un angle donné.

Solution.

1°. Si l'angle donné eſt ſur le papier, poſez le centre du rapporteur ſur la pointe de l'angle A, & ajuſtez le bord intérieur de la regle qui fait le diametre du rapporteur ſur la jambe de l'angle AB.

Pl. I. Fig 17.

2°. Comptez enſuite ſur le rapporteur le nombre des degrés que contient l'arc DE qui ſe trouve entre les deux côtés de l'angle AB & AC.

Si l'angle propoſé eſt dans un champ :

1°. Poſez le *demi-cercle*, ou *graphometre*, de façon que ſon diametre AB réponde à un des côtés du triangle.

Fig. 28.

2°. Faites tourner ſur le centre du graphometre la *regle* ou *alidade* EF juſqu'à ce que vous apperceviez l'extrémité de l'autre côté de l'angle à travers la fente des pinnules qui ſont attachées à cette alidade.

3°. Comptez enſuite les degrés que marque *la ligne de foi* de l'alidade qui paſſe par le centre du demi-cercle, en commençant à la jambe de l'angle à laquelle répond le diametre du graphometre; & vous connoîtrez la grandeur de l'angle. (§. 16.)

Problême II.

44. Meſurer une ligne droite.

Solution.

Si la ligne propoſée eſt ſur le papier, tirez auſſi une ligne droite ſur le papier, de laquelle vous ferez une *meſure* ou *longueur* ſur laquelle vous prendrez avec un compas dix parties égales à volonté, que vous nommerez *pieds*; vous tranſporterez enſuite cette longueur de dix pieds ſur le

reste de votre mesure autant de fois que faire se pourra, & vous aurez une mesure (§. 96) propre à mesurer toute ligne droite sur le papier.

Si la ligne à mesurer est dans un champ, on se sert d'une chaîne, d'une corde, d'une perche, ou d'une toise, dont les divisions sont connues : il suffit de diviser une toise en pieds ; & la derniere d'une extrémité doit être divisée en pouces.

Pl. II. Fig. 29. Lorsqu'on proposera donc une ligne droite à mesurer sur le papier :

1°. Posez une jambe d'un compas sur A & ouvrez-le jusqu'à ce que l'autre jambe soit posée sur B.

2°. Transportez ensuite une jambe du compas ainsi ouvert sur le commencement d'une division, par exemple, de dix pieds, & l'autre jambe sur le reste de votre mesure proposée, en remarquant bien exactement sur quelle autre division elle tombera, par exemple, 5 pouces, ou 5 lignes. On verra par là que la ligne proposée a 10° & 5′ ou 5″ de longueur, parcequ'elle contient 10 pieds & 5 pouces ou 5 lignes de la mesure préparée.

Voulez-vous mesurer une ligne donnée sur la terre ?

1°. Plantez un piquet à chaque extrémité, & si la ligne donnée étoit beaucoup plus longue que votre *toise, perche, cordeau*, &c. posez un bout de votre mesure au bas d'un des petits piquets plantés aux extrémités de la ligne donnée ; conduisez l'autre bout de la mesure sur la ligne, & à l'extrémité de cette mesure plantez un piquet pour faire souvenir que l'espace d'entre ces deux piquets est la longueur d'une toise, perche, &c. Transportez ensuite votre mesure depuis le second piquet que vous venez de planter, jusqu'à

l'extrémité de la ligne proposée, en observant de planter un piquet au bout de chacune des longueurs de votre mesure.

2°. Comptez le nombre des toises, &c. que la ligne donnée contient, par le nombre de fois qu'elle renferme la longueur de votre mesure, en tout ou en parties.

Remarque I.

45. On peut ajuster un anneau à chaque extrémité de la chaîne ou corde, dans lesquels anneaux on fait entrer les petits bâtons ou piquets plantés en terre.

Remarque II.

46. Les chaînes sont incommodes par leur pesanteur, & on ne les étend pas assez facilement. Si on mesure une ligne droite avec une perche en la tournant sur pointe, il faut avoir soin ou d'ajouter à la ligne que l'on mesure la grosseur ou diametre de la perche autant de fois qu'on l'aura tournée, ou de diminuer le diametre de la perche, de la longueur de la ligne qu'aura produit la mesure, autant de fois qu'on l'aura tournée. Je suppose, par exemple, que l'on me propose une ligne droite de six toises à mesurer; je prends en main une perche de la longueur précisément d'une toise, & d'un pouce de diametre ou de grosseur, & j'approche un bout de cette perche d'un des piquets plantés aux extrémités de la ligne proposée; ensuite je leve le bout de la perche qui touchoit au piquet, & j'en forme en l'air un demi-cercle dont le centre est à l'autre bout de la perche, qui dans le moment qu'elle

forme une perpendiculaire avec la ligne droite donnée, se trouve posée sur la grosseur, & puis achevant le demi-cercle, en la couchant doucement sur le reste de la ligne donnée, le diametre de ce demi-cercle se trouve avoir deux toises & un pouce, au lieu de deux toises seulement. Je continue à mesurer de la même façon le reste de la ligne droite, & je trouve que cette ligne ne me paroît avoir que 5 toises & 7 pouces au lieu de 6 toises qu'elle a en effet. Cela vient donc de la grosseur de la perche qui ayant un pouce de grosseur, & ayant été tournée 5 fois, a pris 5 pouces de la ligne donnée qu'il faut par conséquent ou ajouter à cette ligne donnée, ou diminuer de la longueur de la perche, pour faire la juste mesure de la ligne proposée.

Il n'y a pas moins d'inconvénients à se servir d'une corde de chanvre ; elle s'alonge dans les temps chauds & secs, & se raccourcit dans les temps humides. Schwenter a remarqué (livre 1, trait. 2, page 381 de sa Géom. prat.) qu'une corde de 16 pieds de longueur s'étoit raccourcie presque d'un pied en moins d'une heure dans un temps de brouillards. Pour lever cet inconvénient, il faut tordre les ficelles dont on veut faire la corde dans un sens contraire à celui que l'on tordra la corde même, qu'il faudra en même temps imbiber d'huile de lin, & quand elle sera seche, la passer dans de la cire fondue, & enfin la goudronner. Le même Schwenter assure (page 382) qu'une corde ainsi préparée resteroit un jour plongée dans l'eau sans qu'on y pût remarquer presque aucune diminution de longueur.

Remarque III.

47. On a inventé un instrument fort commode pour mesurer les lignes sur le papier ; on le nomme *Echelle Géométrique ;* nous en parlerons plus au long dans la suite.

Problême III.

48. Faire un angle égal à un angle donné.

I. CAS. Si on propose l'angle par degrés, tirez d'abord la ligne droite A B.

Pl I. Fig. 17.

1°. Appliquez le centre du rapporteur sur le point A, & son rayon sur la ligne A B.

2°. Comptez autant de degrés depuis D vers E que l'angle donné doit en avoir.

3°. Quand vous aurez trouvé ce nombre, marquez-le par E.

4°. Tirez enfin une ligne droite de A par E, & vous aurez l'angle que vous cherchez.

II. CAS. Lorsqu'on propose l'angle D E F sur le papier :

Pl. II. Fig. 31.

1°. Du centre E décrivez à volonté l'arc G H.

2°. Tirez ensuite la ligne droite *ef*.

3°. De *e* décrivez l'arc *h i* avec la même ouverture de compas de laquelle vous avez formé l'arc ci-dessus G H.

4°. Posez une jambe du compas sur H, & ouvrez le compas jusques à ce que l'autre porte sur le point G.

5°. Posez une jambe du compas ainsi ouvert sur *h*, & posant l'autre sur l'arc *h i*, vous marquerez le point où elle tombe *g*.

6°. De *e* par *g* tirez une ligne droite *ed*, & vous aurez l'angle que vous cherchez.

III. CAS. Si l'angle que l'on propose est sur la terre, il faut se servir du demi-cercle ou graphometre de la maniere que nous avons dit au problême I. (§. 43.)

Démonstration.

Le premier & le troisieme cas sont démontrés par l'opération même.

Dans le second, l'arc $gh = GH$, comme on le démontrera (§. 92), & par conséquent l'angle $def = DEF$ (§. 16, 35). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême IV.

Pl. II. Fig. 32.

49. Si dans les deux triangles ABC & abc, on a l'angle $A = a$, $AC = ac$, & $AB = ab$; on aura aussi $BC = bc$, $B = b$, $C = c$, & les triangles seront égaux entre eux.

Démonstration.

Imaginons-nous que le triangle abc est tellement placé sur le triangle ABC, que le point a soit sur A, & la ligne droite ab sur AB : comme $ab = AB$, le point b sera sur B (§. 30); & comme $a = A$, la droite ac sera aussi placée sur AC (§. 30); & parceque $ac = AC$, le point c sera sur C, & par conséquent bc sur BC (§. 24): les triangles ABC & abc seront donc égaux (§. 31.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême V.

Fig. 32.

50. Si dans les deux triangles ABC & abc on a l'angle $A = a$ & $B = b$, & le coté $AB = ab$;

les triangles seront égaux, & AC $=$ *ac*, BC $=$ *bc*.

Démonstration.

Représentons-nous le triangle ABC posé sur le triangle *abc*, de maniere que A soit posé sur *a*, & le côté AB sur le côté *ab*, puis B sur *b*, la droite AC sur *ac*, & BC sur *bc* (§. 30); pour lors les lignes droites AC & BC se rencontrent au point C, & les droites *ac* & *bc* au point *c*; le point C se trouvera donc posé sur le point *c*, & les triangles seront égaux (§. 31); & AC $=$ *ac*, &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême VI.

51. Si dans les deux triangles ACB & *acb*, on trouve AC $=$ *ac*, AB $=$ *ab*, & BC $=$ *bc*; on aura aussi A $=$ *a*, B $=$ *b*, C $=$ *c*, & tous les triangles de cette façon seront égaux.

Pl. II. Fig. 32.

Démonstration.

De A, rayon AB, décrivez avec un compas l'arc *y*, & de C, rayon CB, décrivez l'arc *x*; supposons ensuite le triangle *acb* posé de façon sur le triangle ACB, que le point *a* soit sur A, & le point *c* sur C (§. 30); la ligne droite *ab* se terminera à l'arc *y*, & *cb* à l'arc *x*; le point *b* sera donc sur B, à l'endroit précisément où les arcs se coupent; & par conséquent les triangles (§. 31) & les angles (§. 30) seront égaux.

Fig. 32.

Corollaire.

52. On doit donc conclure que de trois lignes

droites données on ne peut faire qu'un même triangle.

Problême IV.

53. Construire un triangle équilatéral sur la ligne donnée AB.

II. g. 33.

Solution.

1°. Posez une jambe du compas sur A; & ouvrez le compas jusqu'à ce que l'autre jambe rencontre B; & sans chager la jambe du compas posée sur A, décrivez avec l'ouverture de AB, un arc au-dessus de la ligne donnée.

2°. Mettez ensuite une jambe du compas sur B, & de la même ouverture décrivez un autre arc qui coupera le premier au point C.

3°. Tirez enfin des lignes droites de C à A & B, & le triangle se trouvera fait.

Démonstration.

Les lignes droites AC & BC ayant été prises en égale longueur que la ligne AB (§. 27); le triangle ACB doit être équilatéral (§. 19.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême V.

54. Sur deux lignes droites données AB & BC, faire un triangle qui ait deux côtés égaux.

g. 34.

Solution.

1°. Ayant pris, par exemple, pour base du triangle la ligne droite AB, posez une jambe du compas sur B, ouvrez l'autre jambe jusqu'en C, & formez un arc au même point C.

2°. Faites sur A comme vous avez fait sur B, & ce second arc coupera le premier au point C.

3°. Tirez des lignes droites de C à A & B, & le triangle sera formé.

Démonstration.

Les lignes droites AC & BC ont été faites de la même ouverture de compas; le triangle doit donc avoir les deux côtés égaux (§. 19.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême VI.

55. Faire un triangle de trois lignes droites données.

Pl. II. Fig. 35.

Solution.

1°. Prenez pour base du triangle une des trois, comme seroit AB.

2°. De A comme centre, décrivez un arc avec un compas, dont l'ouverture soit la longueur d'une seconde des trois lignes données, comme AC.

3°. Et puis ouvrant le compas de la longueur de la troisieme ligne BC, posez une jambe sur B, & de l'autre formez un arc qui coupe le premier au point C.

4°. Tirez ensuite les lignes droites, CA & CB; & vous aurez le triangle que vous desirez (§. 52.)

Remarque I.

56. Si dans l'opération ci-dessus les deux arcs ne se coupent pas, on ne peut faire le triangle

avec les trois lignes droites données. (§. 26.)

Remarque II.

57. Les regles pour la construction des figures sont d'une très grande utilité. C'est sur elles qu'est fondée toute l'*Ichnographie* d'un champ, c'est-à-dire, la levée des plans, sans laquelle il n'est pas possible de dresser la carte d'un terrein. Bien plus, les principes de ressemblance que j'ai introduits dans la géométrie, servent aussi, comme on le verra dans la suite, à la démonstration de la ressemblance des figures. On y voit même les parties qu'on doit choisir dans un terrein, quand il s'agit de le mesurer, ou d'en dresser un plan figuré ou non figuré. C'est en conséquence de cette utilité reconnue que je vais proposer encore quelques problêmes sur les triangles.

Problême VII.

Pl. II. Fig. 36. 58. Faire un triangle de deux lignes droites données AB & AC, & de l'angle intercepté A.

Solution.

1°. Prenez pour base la droite AB.

2°. Formez au point A un angle égal à l'angle proposé. (§. 48.)

3°. Transportez sur la ligne AD l'autre droite donnée AC.

4°. Tirez de C une ligne droite à B, & le triangle sera fait. (§. 49.)

Remarque.

59. Il n'est pas nécessaire dans la pratique de marquer

marquer les lignes inutiles comme ici AD, mais on peut seulement désigner le point C après l'application de la regle.

Problême VIII.

60. Avec deux angles & une ligne droite donnés construire un triangle.

Solution.

1°. A l'extrémité A de la droite donnée AB formez un angle égal à un des angles proposés. Pl. II. Fig. 37.

2°. A l'extrémité opposée faites un autre angle donné (§. 48); les jambes de ces deux angles se couperont en C, & formeront le triangle que l'on demande. (§. 50.)

Problême IX.

61. Du lieu C mesurer la distance des deux autres lieux accessibles A & B. Fig. 38.

Solution.

1°. Plantez un bâton ou petit piquet au lieu C que vous aurez choisi à volonté.

2°. Mesurez la longueur de la ligne AC (§. 44) & portez-la de C en *a*, en sorte que le bâton que vous planterez au point *a*, soit en ligne droite avec C & A. (§. 8.)

3°. Faites la même opération pour la longueur de la ligne BC que vous transporterez en *b*.

4°. Mesurez enfin la longueur de la ligne *ab*, c'est la distance que l'on demande.

Démonstration.

Les angles x & y sont égaux (§. 40); & comme AC = aC & BC = bC, on a ab = AB (§. 49). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

62. Si la place étoit trop étroite pour pouvoir transporter en ab les longueurs entieres des lignes AC & BC, il suffira de transporter la moitié, la troisieme ou la quatrieme partie, en Ca & Cb, & pour lors on aura $ab = \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$, ou $\frac{1}{4}$ de AB, ce qu'il sera facile de comparer. (§. 152.)

Problême X.

63. Transporter un angle d'un terrein dans un autre avec une chaîne ou avec une corde.

Solution.

Pl II. Fig. 39

Supposons qu'il faille transporter l'angle A en C.

1°. Prenez une longueur à volonté sur chaque jambe de l angle donné A, & tirez une droite de l'un des points choisis F à l'autre D.

2°. Transportez de C en d la longueur AD, & attachez la corde aux deux piquets C & d, de maniere que Cf = AF. df = DF.

3°. Plantez un piquet en f, & vous aurez l'angle dCf = FAD.

Démonstration.

Puisque AF = Cf, AD = Cd, & DF = df, l'angle C est donc égal à l angle A. (§. 51.)

Problême XI.

64. **Trouver la diſtance de deux lieux dont un ſeul B eſt acceſſible.**

Solution.

1°. Ayant planté un piquet dans un endroit choiſi à volonté, comme E, prenez la longueur de la ligne droite EB, que vous tranſporterez de E en C, de maniere que le piquet ſe trouve en ligne droite avec B & C. (§ 8.) Pl II. Fig. 40.

2°. Faites au point C un angle égal à celui de B. (§. 63.)

3°. Marchez enfin de C vers D, juſqu'à ce que le piquet que vous planterez en D, ſoit en ligne droite avec FC & EA; & de cette façon la ligne CD ſera égale à la ligne AB.

Démonſtration.

On a fait l'angle C égal à l'angle B, & la droite CE égale à la droite EB. D'ailleurs les angles verticaux ſont égaux (§. 40) : CD eſt donc égal à AB. (§. 50.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

1°. On s'y prend encore de la maniere ſuivante. Fichez un piquet en I en ligne droite avec BA, puis un ſecond où vous voudrez, comme en K. Fig 41.

2°. Tranſportez de K en L la longueur de la ligne IK, puis en M la ligne BK.

3°. Marchez enſuite de M vers N juſqu'à ce que vous trouviez un endroit où vous puiſſiez planter un piquet qui ſoit en ligne droite avec M & L, auſſi bien qu'avec KA, & vous aurez MN = BA.

Démonstration.

BK = KM & IK = KL. $o = u$ & $m = n$, donc IB = LM & $y = x$: car $o + m = u + n$, & IK = KL : on aura conséquemment IA = NL, & AB = MN. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque I.

65. Ce que nous avons dit sur le Problême IX a lieu ici. (§. *62.*)

Remarque II.

Pl. II. Fig. 40.

66. Si l'on vouloit trouver la largeur d'une riviere, & que la ligne droite BE ne pût être transportée de E en C le long du rivage, on fichera le piquet E à une distance du rivage, choisie à volonté ; & dans ce cas la longueur de la droite CD surpassera d'autant plus la largeur de la riviere, que le piquet E sera éloigné de son bord.

Problême XII.

Fig. 43.

67. Tirer par le point C donné une parallele à la droite AB.

Solution.

1°. Appliquez une regle à la droite AB.

2°. Posez une jambe du compas en C, & ouvrez l'autre jusqu'à la regle, comme si vous vouliez décrire un arc dont la droite AB fût la *tangente.*

3°. Conduisez ensuite le compas de part & d'autre du point C, tout le long de la regle posée sur AB, & vous aurez la parallele DE. (§. *22.*)

Autrement.

On peut faire la même opération avec une *parallele*, c'est-à-dire, un instrument composé de deux regles tellement attachées l'une à l'autre par deux tenons égaux, qu'on puisse conduire facilement ces deux regles, selon les différents espaces qu'on veut leur faire parcourir. Ayant donc une parallele, posez une des regles sur la droite AB.

Pl. II. Fig. 44.

2°. Conduisez l'autre jusqu'au point C, & vous pourrez tout le long de cette seconde regle tirer la droite DE parallele à AB.

Remarque.

68. Si dans la premiere façon de résoudre le Problême, on ne pouvoit ouvrir le compas jusqu'en E, on tirera une parallele à AB, à une distance proportionnée au compas, ou choisie à volonté, comme CD; & si la distance de F à E étoit encore trop grande pour que le compas y puisse atteindre, on formera encore une autre parallele à CD, & ainsi de suite jusqu'à ce que le compas puisse atteindre le point E: on fera pour lors la droite LM qui sera parallele à la droite AB: car EF = HI, & FG = IK: donc EF + FG = HI + IK: c'est-à-dire, EG = HK (§. 24. Arith.), & par conséquent LM sera parallele à AB. (§. 22.)

Fig. 42.

Problême XIII.

69. Du point C donné abaisser une perpendiculaire sur la droite AB.

Fig 45.

Solution.

1°. Ayant posé une jambe du compas sur C,

coupez avec l'autre la ligne droite AB par un arc à volonté, comme DE.

2°. De D & E faites une intersection volontaire, comme en F.

3°. Conduisez une ligne droite par FC, jusqu'à G, & vous aurez la perpendiculaire que l'on demande.

Démonstration.

On a DC = CE & DF = FE, on aura donc aussi les angles DFG & GFE (§. 51), & par conséquent les angles de suite égaux à G (§. 49): la droite CG sera donc aussi perpendiculaire sur AB (§. 17.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XIV.

Pl. II. Fig. 46. 70. Elever du point C une perpendiculaire sur la droite AB.

Solution.

1°. Mettez une jambe du compas sur C.

2°. Coupez de part & d'autre à égale distance de C la ligne droite AB, comme seroit DE.

3°. De D & E faites une intersection en F avec la même ouverture du compas.

4°. Tirez enfin la droite GC par CF, & vous aurez la perpendiculaire demandée.

Démonstration.

On fait DC = CE & DF = FE, & on a les angles droits de part & d'autre du point C (§. 51), & par conséquent on a la perpendiculaire GC élevée sur AB (§. 17.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autrement.

Faites un inftrument avec deux regles que vous ajufterez de façon l'une à l'autre, qu'elles faffent un angle droit : cet inftrument fe nomme *Equerre*.

Pl. II. Fig. 47.

Appliquez un des côtés de l'équerre fur la ligne donnée AB de maniere que le fommet de l'angle foit précifément fur le point C ; puis tout le long de l'autre côté de l'équerre vous tirerez la droite CD, qui fera perpendiculaire.

Démonftration.

L'angle de l'équerre eft droit ; les lignes DC & CB, tirées le long de cette équerre, font donc auffi un angle droit ; & par conféquent DC fera perpendiculaire fur AB (§ 18).

Théorème VII.

71. Si dans les deux triangles rectangles ABC & abc, on a AB $=$ ab & BC $=$ bc, ou dans les angles obliques A $=$ a, on aura auffi AC $=$ ac, B $=$ b, C $=$ c, & les triangles feront égaux.

Fig. 48.

Démonftration.

De l'efpace BC ayant fait l'arc FG au point C, imaginons-nous que le triangle abc eft placé fur l'autre ABC, de façon que le point a eft fur A, b fur B : comme l'angle a $=$ A, & ab $=$ AB, le point c fera donc auffi fur C : & comme bc $=$ BC, le point c fe trouve fur l'arc FG (§. 13), & par conféquent auffi c fe trouve fur C, précifément au point où l'arc FG coupe la droite AC ; BC tombant donc fur bc (§. 24), les triangles feront égaux (§. 31).

Théorême VIII.

Pl. II. Fig. 49.

72. Si la ligne transversale EF coupe les deux paralleles AB & CD aux points G & H, on aura, 1°. les deux angles alternes x & y égaux entre eux. 2°. L'angle *externe* o est égal à l'angle y qui lui est opposé. 3°. Les deux angles *internes* opposés u & y font tous deux pris ensemble 180°.

Démonstration.

1°. Qu'on tire les perpendiculaires HI & GK, qui seront égales (§. 2 :), les angles I & K sont aussi égaux (§. 18, 37). Donc $x = y$ (§. 71.)

2°. $x = o$ (§. 40), donc $y = o$ (§. 22 Arith.)

3°. $u + o = 180°$ (§. 38), donc $u + y = 180°$ (§. 24 Arithm.). Voilà donc les trois propositions démontrées.

Théorême IX.

Pl. III. Fig. 49.

73. Si la ligne transversale EF coupe les droites AB & CD en G & H, de façon que les deux angles x & y, ou même l'angle externe o & l'interne y soient égaux; ou si les deux internes pris ensemble font 180°, les lignes AB & CD seront paralleles entre elles.

Démonstration.

1°. Abaissez de G la perpendiculaire GK sur la ligne CD: faites GI = HK, & tirez la droite HI. Comme $x = y$, on aura I = K & HI = GK (§. 49); par conséquent l'angle I sera droit (§. 37), & AB parallele à CD.

2°. Soit $o = y$, comme $o = x$ (§. 40), on aura $x = y$ (§. 22 Arithm.): les lignes AB & CD seront donc paralleles entre elles.

3°. Soit $y+u=180°$: parceque $o+u=180°$ (§. 30), on aura $o=y$ (§. 22 & 25, Arithm.) ; conséquemment les lignes AB & CD seront paralleles. Voilà donc les trois propositions démontrées.

Théorême X.

74. Dans quelque triangle que ce soit les trois angles pris ensemble font 180° ; & si l'on prolonge un des côtés, l'angle externe sera égal aux deux angles internes opposés pris ensemble.

Démonstration.

Tirez par le sommet du triangle C une parallele DE à la base AB, vous aurez $1=I$, & $2=II$ (§. 72) : or $I+3+II=180°$ (§. 38) ; donc $1+3+2=180°$ (§. 24, Arithm.) *Premiere partie du Théorême démontrée.* Si on prolonge le côté AB jusqu'en D, on aura $3+4=180°$ (§. 38) : or, par ce que nous venons de démontrer plus haut, $1+2+3=180°$; donc $3+4=1+2+3$ (§. 22, Arithm.), & par conséquent $4=1+2$ (§. 25, Arith.) Ce qui démontre la seconde partie du Théorême.

Pl. II. Fig. 50. Fig. 51.

Corollaire I.

75. Il n'y a donc qu'un seul angle droit dans quel triangle que ce puisse être, & les deux autres angles pris ensemble en font un droit, ou valent 90° (§. 37) ; & deux lignes droites perpendiculaires à l'égard d'une troisieme, pourroient être prolongées jusqu'à l'infini sans jamais se rencontrer ; c'est en quoi elles sont paralleles.

Corollaire II.

76. A plus forte raison ne pourra-t il se trouver plus d'un angle obtus dans un triangle (§. 18.)

Corollaire III.

77. Si de 180° on retranche l'angle d'un triangle, la somme des deux autres reste ; & si au contraire de 180° on ôte la somme de deux angles d'un triangle, ce qui reste est la valeur du troisieme.

Corollaire IV.

78. Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisieme de l'un sera aussi égal au troisieme de l'autre (§. 25, Arithm.)

Théorême XI.

Pl. III. Fig. 52.

79. Dans un triangle isoscele A B C, les angles x & y formés par la base sont égaux, & la perpendiculaire C D coupera en deux parties l'angle C, la base A B, & le triangle même.

Démonstration.

Qu'on coupe en deux parties égales la droite AB, & qu'on tire ensuite la droite DC : puisqu'on a aussi A C = CB (§. 19), on aura $x = y$, & $o = u$, $m = n$ & △ ACD = △ CDB (§. 15), & par conséquent CD perpendiculaire sur AB (§. 17). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

80. Ainsi dans tout triangle équilatéral, tous

les angles ſont égaux ; chacun vaut donc 60°. (§. 74.)

Théorême XII.

81. Si dans le triangle ABC, les angles x & y de la baſe AB ſont égaux, les côtés AC & CB ſeront auſſi égaux. Pl. III. Fig. 52.

Démonſtration.

Tirez la droite CD, de maniere que $m = n$; & comme $x = y$, on aura auſſi $o = u$ (§. 78). Donc AC = CB (§. 50.)

Corollaire.

82. Si les trois angles ſont donc égaux, & qu'ils vaillent par conſéquent 60° (§. 74), les trois côtés ſeront donc auſſi égaux entre eux.

Théorême XIII.

83. L'angle du centre eſt double d'un *angle à la circonférence*, lorſque ces deux angles ont un même arc pour baſe.

Démonſtration.

I. Cas. $o = x + u$ (§. 74); or comme AC = CB (§. 27), on aura $x = u$ (§. 79), & par conſéquent $o = u + u = 2u$. Fig. 53.

II. Cas. $x = 2y$ & $u = 2o$, *par le nombre* 1; donc $x + u = 2y + 2o$ (§. 24, Arithm.) Fig. 54.

III. Cas. $o + x = 2u + 2y$, & $o = 2u$, *par le nombre* 1; donc $x = 2y$ (25, Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.* Fig. 55.

Corollaire I.

84. La moitié de l'arc AD eſt donc la meſure Fig. 54.

de l'angle à la circonférence ABD, dont l'arc AD est la base; car l'arc entier AD est la mesure de l'angle du centre ACD (§. 16). Si l'angle ACB a pour base le demi cercle ADB, ou que l'angle HBK ait pour base l'arc HIK plus grand que le demi-cercle, il est évident que le demi-arc AD est précisément la mesure de l'angle ACD, & ½ DB de l'angle DCB : de même ½ HI de l'angle HBI, & ½ IK de l'angle IBK: donc ½ ADB, ou le quart, est la mesure de l'angle ACB; & ½ HIK, ou un peu plus que le quart, est aussi la mesure de l'angle HBK.

Pl. III. Fig. 57 & 59.

Fig. 59.

Corollaire II.

Fig. 56.

85. Deux ou plusieurs angles ABC & ADC, terminés à la circonférence du même cercle, & qui ont le même arc AC pour base, sont égaux. (§. 35.)

Corollaire III.

Fig. 57.

86. Tout angle dans le demi-cercle ACB est droit: car il a le demi-cercle pour base, & le quart pour mesure (§. 84.)

Corollaire IV.

Fig. 59.

87. Un angle à la circonférence renfermé dans un cercle, est plus petit qu'un angle droit, s'il a pour base un arc plus petit que le demi cercle; il sera aussi plus grand qu'un angle droit, si sa base est un arc HK plus grand que le demi-cercle (§ 86); par conséquent il sera aigu dans le premier cas, & obtus dans le second (§. 18.)

Problême XV.

88. Examiner si une *équerre* est juste.

Solution.

1°. Décrivez à volonté le demi-cercle ACB. Pl. III. Fig. 57.

2°. Tirez de chaque extrémité du diametre les lignes droites AC & BC à un même point de la circonférence, tel que bon vous semblera.

3°. Posez au point C l'angle de l'équerre, & si ses deux côtés rasent les lignes droites AC & AB, l'équerre est juste.

Démonstration.

L'angle ACB est droit (§. 86); si l'équerre lui est conforme, elle sera donc juste (§. 30). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XVI.

89. Elever une perpendiculaire à l'extrémité d'une ligne.

Solution.

1°. Posez une jambe du compas sur un point pris à volonté, comme C, & ouvrez l'autre jusqu'en A. Fig. 60.

2°. Du point C marquez la même distance D sur la ligne AB.

3°. Ensuite avec une regle appliquée le long de DC, marquez encore la même distance CA de C en E.

4°. Tirez enfin la ligne droite AEF, qui sera perpendiculaire avec AB.

Démonstration.

Puisque AC = CD = CE, de C on peut décrire un demi-cercle par les points EAD (§. 27, 36) : l'angle A est donc droit (§. 86), & par con-

séquent la droite FA perpendiculaire à AB (§. 18). *Ce qu'il falloit démontrer.*

On peut faire la même opération avec l'équerre, comme nous l'avons vu (§. 70.)

Problême XVII.

90. Diviser une ligne droite en deux parties égales.

Solution.

Pl. III. Fig. 61. 1°. Des deux extrémités de la ligne A & B, faites à votre gré les deux intersections C & D.

2°. Tirez une droite de C à D; elle partagera en deux également la droite A B.

Démonstration.

A C étant égal à C B, & A D = D B, on a $o = y$ (§. 51) : ainsi dans les triangles A C E & E C B, A E = E B (§. 49.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Fig. 62. 91. On peut essayer de faire la même opération méchaniquement, c'est-à-dire en tâtonnant. Car en mettant une jambe du compas au point A, on l'ouvre ensuite jusqu'à ce qu'on rencontre à peu près le milieu de la ligne, où l'on fait un petit arc. On fait la même chose de l'autre côté de la ligne B, le compas ouvert comme auparavant, & l'on voit pour lors si les deux arcs se rencontrent au même point E.

Théorême XIV.

Fig. 58 & 63. 92. Les *cordes* des arcs égaux A B & D E pris dans un même cercle, ou dans deux cercles

égaux, sont égales entre elles ; & si les cordes sont égales, les arcs le seront aussi.

Démonstration.

Tirez du centre C les rayons C A, C B, C E, & C D, qui sont tous égaux entre eux (§. 27). Et comme les arcs A B & D E sont égaux, les angles A C B & D C E seront aussi égaux (§. 35). Donc aussi A B = D E.

2°. Soit A B = D E, on aura $o = x$ (§. 51), & par conséquent les arcs A B & D E seront égaux (§. 35.)

Corollaire.

93. Si l'on divise donc la circonférence d'un cercle en tant de parties égales qu'on voudra, & qu'on tire des sous-tendantes, la figure aura chaque côté & chaque angle égaux (§. 85) ; la figure sera donc aussi réguliere (§. 21.)

Problême XVIII.

94. Diviser un arc en deux parties égales.

Solution.

1°. Des extrémités de la corde A B de l'arc A E B faites les intersections à volonté en C & D. Pl. III. Fig. 64.

2°. Tirez une droite de C à D, elle partagera l'arc en deux parties égales.

Démonstration.

La ligne C D coupe la corde A B en deux parties égales au point E, & forme deux angles droits au même point (§. 90) ; on a donc A E = B E (§. 49) ; par conséquent les arcs A E & B E sont égaux (§. 92.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême XV.

Pl. III. Fig. 65. 95. La perpendiculaire D A, coupant la corde E F en deux parties égales en G, paſſe par le centre du cercle C, & coupe en même temps l'arc E D F en deux parties égales. Le rayon perpendiculaire abaiſſé du centre C ſur la corde E F, coupe non ſeulement la corde, mais encore l'arc E D F.

Démonſtration.

1°. Comme E G == G F, & qu'il y a deux angles droits au point G, on a E A D == D A F (§. 49); ainſi les arcs E D & D F ſont égaux. (§. 84, 85).

2°. Les cordes A E & A F étant égales, les arcs A F & E A le ſont auſſi (§. 92); par conſéquent A E + E D == A F + F D (§. 24, Arithm.) : A D étant le diametre du cercle, A D paſſe donc par le centre (§. 13.)

3°. Si C G eſt perpendiculaire à E F, les angles du point G ſeront égaux (§. 18). Et comme E C == C F (§. 27), on aura E G == G F, & E C D == D C F (§. 71); par conſéquent les arcs E D & D F ſont égaux (§. 35). Voilà les trois articles démontrés.

Problême XIX.

Fig. 66. 96. Diviſer un angle donné B A C en deux parties égales.

Solution.

1°. Ayant poſé une jambe du compas ſur A, marquez un point à volonté ſur chaque côté de l'angle, à égale diſtance de A, comme D & E.

2°. De D & E faites une intersection au point F.

3°. Tirez la droite AF, & l'angle sera divisé en deux parties égales.

Démonstration.

Puisque AD = AE & DF = EF, & que la droite AF est commune aux deux triangles, on aura $o = x$. (§. 51.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XX.

97. Décrire un cercle dont la circonférence touche à trois points donnés. Pl. III. Fig. 67.

Solution.

1°. De A & B faites des intersections à volonté, comme en D & E, & tirez la droite ED.

2°. Faites de semblables intersections de B & C en F & G, & tirez la droite FG : le centre du cercle sera le point H où les deux droites se coupent mutuellement.

Démonstration.

Si de A à B, de même que de B à C, on tire des lignes droites, elles seront les cordes des arcs du cercle que l'on cherche (§. 13). Or les lignes DE & FG coupent en deux parties égales les cordes AB & BC (§. 90). Chaque ligne passe donc par le centre du cercle (§. 95). Le centre sera par conséquent au point H, où les lignes se coupent réciproquement. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XXI.

98. Construire un quarré sur une ligne droite donnée AB. Fig. 68.

Solution.

1°. Elevez à une de ſes extrémités A une perpendiculaire qui ait la même longueur que la ligne AB. (§. 70, 89.)

2°. De B & C faites une interſection en D, le compas ouvert de la longueur AB.

3°. Tirez les droites CD & DB.

Problême XXII.

Pl. III. Fig. 69.

99. Conſtruire un rectangle avec deux lignes données AB & BC.

Solution.

1°. Joignez par un angle droit les deux lignes AB & CB. (§. 89.)

2°. De A faites un arc en D, le compas ouvert de l'eſpace BC, & mettant une jambe du compas ſur C, vous l'ouvrirez de l'eſpace BA, & ferez un ſecond arc qui coupera le premier au point D.

3°. Tirez enſuite les lignes droites CD & DA.

Problême XXIII.

Fig. 70.

100. Ayant la droite AB avec un angle oblique, conſtruire un rhombe.

Remarque.

1°. Faites l'angle donné A à l'extrémité de la ligne AB (§. 48), & vous aurez AC = AB.

2°. De C & B, avec le compas ouvert depuis A juſqu'à B, faites l'interſection en D.

3°. Tirez enſuite les lignes CD & BD.

Problême XXIV.

101. Ayant les deux droites AB & AC, avec l'angle oblique A, construire un rhomboïde. Pl. III. Fig. 71.

Solution.

1°. Placez l'angle donné à l'extrémité A de la ligne AB (§. 48), & faites la droite AC égale à l'autre ligne donnée.

2°. De B, le compas ouvert de l'espace AC, faites un arc en D, & du point C faites un autre arc qui coupe le premier en D avec l'ouverture du compas AB.

3°. Tirez enfin les droites CD & DB.

Théorême XVI.

102. La diagonale AD partage le quarré, le rectangle, le rhombe & le rhomboïde en deux parties égales : les angles diagonalement opposés sont égaux, & les côtés opposés AB & CD, AC & BD sont paralleles entre eux. Fig. 72.

Démonstration.

Dans toutes ces figures on a AC == BD & CD == AB (§. 20). Les triangles ACD & ABD sont donc égaux. De même $x == x$ & $o == o$, $u == u$, (§. 51). Et par conséquent AB est parallele à CD, & AC à BD. (§. 73.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

103. Ainsi tous ces quadrilateres sont des parallélogrammes. (§. 23.)

Problême XXV.

104. Trouver l'angle d'un Polygone régulier.

Solution.

1°. Divisez 360 par le nombre des côtés du polygone.

2°. Soustrayez de 180° le nombre qui en vient, le reste sera le nombre des degrés qui répond à l'angle donné.

EXEMPLE.

Pl. III. Fig. 73. Dans l'exagone, 360 degrés divisés par 6 donnent 60 pour quotient, lequel soustrait de 180°, reste 120° pour l'angle ABC.

Démonstration.

Soit ABC que l'on cherche.

Décrivez un cercle par ces trois points ABC (§. 97) : comme on a AB = BC (§. 21), les arcs AB & BC seront aussi égaux (§. 92). Or comme l'arc AD, moitié de l'arc ADC, est la mesure de l'angle B (§. 84), on trouve l'arc AD, ou l'angle B, en retranchant l'arc AB du demi-cercle BAD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XXVI.

105. Trouver la somme de tous les angles de quelque polygone que ce soit.

Solution.

1°. Multipliez 180 par le nombre des côtés.

2°. Soustrayez du produit le nombre 360, le reste sera la somme des angles.

Exemple.

Pour le Pentagone.	Pour l'Exagone.
180	180
5	6
900	1080
360	360
540	720

Démonstration.

Pl. III. Fig. 74.

D'un point pris dans quelque polygone que ce puisse être, on pourra faire de ce polygone autant de triangles qu'il aura de côtés. Si l'on multiplie donc 180 par le nombre des côtés du polygone, le produit sera la somme des angles de tous les triangles. (§. 74.)

Or tous les angles qui sont autour du centre F, & qui n'appartiennent pas aux angles du polygone, font toujours 360°. (§. 42.)

Si l'on retranche donc du produit trouvé la somme 360, le reste sera la somme des angles du polygone. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XXVII.

Pl. IV. Fig. 75.

106. **Décrire un polygone régulier, la droite AB étant donnée.**

Solution.

Faites à chacune des extrémités AB des angles égaux, chacun en particulier, à la moitié de l'angle du polygone; de cette façon les côtés du trian-

gle isoscele A B C se couperont mutuellement au centre du cercle C.

2°. Du point C prenez avec un compas la longueur de C A pour servir de rayon au cercle dont vous décrivez la circonférence, que vous ferez passer par les deux points A B. Vous diviserez ensuite cette circonférence en autant de longueurs de la ligne donnée que vous pourrez.

Remarque.

On trouve dans les étuis de mathématiques un demi-cercle gradué, c'est-à-dire divisé en ses 180°; & par le moyen de ce demi-cercle on décrit aisément un angle de tel nombre de degrés que l'on veut.

Problême XXVIII.

107. Décrire un polygone régulier dans un cercle donné.

Solution.

Pl. IV. Fig. 76. 1°. Divisez 360 par le nombre des côtés du polygone demandé, afin d'avoir la quantité de l'angle ACB.

Démonstration.

L'Angle A C B est de 60° (§. 107), les autres A & B sont donc de 120°. (§ 77.)

Or A C = B C (§. 27), on aura donc aussi A = B (§. 79); & par conséquent chacun étant de 60°, sera égal à l'angle C. Donc A B sera égal à A C (§. 82). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

109. On décrira donc un exagone régulier dans un cercle, si on le divise par son rayon.

Corollaire II.

110. Si l'on veut construire un exagone sur une ligne donnée, il suffira d'y faire un triangle équilatéral (§. 53); car le sommet C est le centre du cercle dont la circonférence doit passer par les angles qui forment les côtés de l'exagone.

Problême XXIX.

111. Construire une figure dont on donne tous les côtés, & autant de diagonales qu'il y a de côtés, excepté trois.

Pl. IV. Fig. 77.

Solution.

Toute figure se réduisant, par le moyen des diagonales, en autant de triangles qu'elle a de côtés, si on en excepte deux, il suffira de construire un triangle sur un autre. (§. 55.)

Problême XXX.

112. Construire une figure dont on a tous les côtés, & autant d'angles qu'il y a de côtés, excepté trois.

Solution.

Pl. IV. Fig. 78. 1°. Tirez la droite A B égale à un des côtés donnés ; aux deux extrémités A & B formez les angles requis A & B (§. 48), auxquels vous appliquerez les côtés A E & B C.

2°. Si l'on fait en E un angle convenable, on pourra appliquer le côté E D, & tirer ensuite la droite D C.

3°. Ou bien on fera en D une intersection des points E & C, & pour lors on aura la figure que l'on demande.

Remarque.

113. Si l'on donne tous les angles excepté un, il n'est pas nécessaire que l'on donne deux côtés.

Problême XXXI.

114. Trouver l'*aire* d'un quarré.

Solution.

Mesurez un côté & multipliez la longueur par elle-même, vous trouverez dans le produit l'aire du quarré.

EXEMPLE.

Soit le côté du quarré 345″

```
        345
        ----
       1725
      1380
     1035
     ------
L'aire sera   119025″
```

Démonstration.

Pour mesurer une superficie, il faut prendre la superficie elle-même pour mesure. Et comme le quarré a tous les angles droits & les côtés égaux, on peut bien prendre le quarré lui-même. Si l'on divise donc le côté AB en quatre parties égales, ou qu'il contienne 4 pieds, il est évident qu'on trouvera le nombre des pieds quarrés contenus dans le grand quarré ABCD, si l'on multiplie ce côté par lui-même ; car on trouve dans chaque tranche du grand quarré autant de petits que le côté AB a de divisions.

Pl. IV. Fig. 79.

Corollaire I.

115. Si le côté du quarré est divisé en dix parties, l'aire du quarré en aura 100. Et comme une toise se mesureroit en long par dix pieds, si elle étoit composée de dix, le pied par dix pouces, &c. la toise de dix pieds quarrés contiendroit 100 pieds de superficie, le pied quarré 100 pouces, &c.

Corollaire II.

116. Un nombre donné se diviseroit alors facilement en pouces, pieds & toises quarrées ; à savoir en assignant de la droite à la gauche deux chiffres pour les toises, deux pour les pieds, deux pour les pouces, &c.

Exemple. 119025 pouces feroient 11 toises 90 pieds & 25 pouces.

Problême XXXII.

117. Trouver l'aire d'un rectangle.

Solution.

Pl. IV. Fig. 80.

1°. Mesurez la largeur AB & la hauteur BC.

2°. Multipliez la premiere par la seconde, le produit sera l'aire de la figure rectangulaire.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{rccc} \text{Soit } AB = & 3^{\circ} & 4' & 5'' \\ AD = & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 10 & ,3 & 5 \\ & 69 & 0 & \\ & 345 & & \\ \hline & 4^{\circ} & 24' & 35'' \end{array}$$

Démonstration.

C'est la même que celle du Problême précédent.

Théorême XVIII.

Fig. 81.

118. Deux parallélogrammes ABCD, & EFDC, qui ont la même base & la même hauteur, sont égaux entre eux.

Démonstration.

AC étant égal à BD, EC = FD, & AE = BF (§. 20) & (§. 24, Arithm.), △ AEC = △ BFD (§. 51); donc si l'on ôte de l'un & l'autre le triangle BEG, ABGC = EGDF (§. 25, Arithm.) : mais si l'on ajoute à l'un & à l'autre le triangle CDG, on aura aussi ABDC = EFCD (§. 24, Arithm.) *Ce qu'on avoit à démontrer.*

Corollaire I.

119. Les triangles qui ont la même base & la même hauteur sont donc égaux.

Corollaire II.

120. Le triangle est donc la moitié du parallélogramme qui a la même ou une base semblable, & qui est entre les deux mêmes paralleles (§. 22).

Problême XXXIII.

121. Trouver l'aire d'un rhombe & d'un rhomboïde.

Solution.

1°. Ayant pris pour base le côté AB, abaissez dessus la perpendiculaire CE. (§. 69.) Pl. IV. Fig. 82.

2°. Multipliez la base AB par la hauteur CE, le produit sera l'aire que l'on cherche.

EXEMPLE.

Soit AB = 456″
CE = 234

1824
1368
912

10° 67′ 04″

Démonstration.

Le rhombe ou rhomboïde ABDC est égal au rectangle dont la base seroit AB, & la hauteur CE (§. 118, 103); or on trouve l'aire d'un rectangle si l'on multiplie AB par CE (§. 117):

on trouve donc auſſi l'aire d'un rhombe ou d'un rhomboïde, en multipliant AB par CE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XXXIV.

122. Trouver l'aire d'un Triangle.

Solution.

Pl. IV. Fig. 83.

1°. Abaiſſez la perpendiculaire CD ſur le côté AB que vous aurez choiſi pour baſe. (§. 69.)

2°. Cherchez quelle eſt la longueur des lignes AB & CD, & multipliez-les l'une par l'autre.

3°. Diviſez le produit par deux, & vous aurez l'aire du triangle.

Démonſtration.

En multipliant AB par CD, le produit ſera l'aire du parallélogramme dont les côtés ſont AB & CD. (§. 117, 121.)

Or comme le triangle eſt la moitié du parallélogramme (§. 120), il faut donc partager en deux l'aire trouvée pour avoir l'aire du triangle. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autrement.

Multipliez la baſe AB par la moitié de la hauteur CD, ou la hauteur CD par la moitié de la baſe AB. Le produit ſera l'aire du △, comme il paroît par l'exemple ſuivant.

AB = 3° 4′ 2″.	AB = 3° 4′ 2″.	½ AB = 1° 7′ 1″
CD = 234.	½ CD = 117	CD = 234
1368	2394	684
1026	342	513
684	342	342
80028	40014 ACB.	40014 ACB.
2) 40014 ACB.		

Problême XXXV.

123. Trouver l'aire de quelque figure rectiligne que ce soit.

Solution.

Comme toute figure, de l'angle B par les diagonales BE, BD, se réduit en autant de triangles qu'elle a de côtés, excepté deux, par exemple, le pentagone ABCDE est réduit en trois triangles ABE, BED & BCD : qu'on cherche donc l'aire de chaque triangle, selon le précédent, & qu'on fasse ensuite l'addition de ces trois aires, on aura celle du pentagone.

Pl. IV. Fig. 84.

Ou si l'on abaisse les deux perpendiculaires CF & EG sur la même base BD, on trouvera l'aire du trapeze par une seule opération, *en* multipliant la moitié de la base BD par la somme des hauteurs EG & CF, ou la base entiere par la moitié des hauteurs.

EXEMPLE.

$\frac{1}{2}$ BD = 4° 3′.	$\frac{1}{2}$ BD = 4° 3′.	$\frac{1}{2}$ EB = 4° 2′
CF = 35	EG = 45	AH = 30
215	215	△ AEB 1260
129	172	
BCD 1505.	△EBD 1935	
	△AEB 1260	
	△BCD 1505	

Aire de la figure = 4700

Corollaire I.

124. Du centre d'un cercle décrit autour d'un polygone régulier, on réduit ce polygone en autant de triangles égaux qu'il a de côtés : car les bases de ces triangles A B, B E, E F, &c. (§. 21), & leurs côtés AC, CB, CE, CF, CG sont égaux entre eux (§. 27). Donc les triangles sont égaux entre eux (§. 51.)

Pl. IV. Fig. 85.

Or si l'on trouve l'aire d'un de ces triangles (§. 122), & qu'on la multiplie par le nombre des côtés du polygone, il est évident qu'on aura dans le produit l'aire du polygone régulier.

EXEMPLE.

$\frac{1}{2}$ AB = 2° 7′
DC = 2 9

243
54

△ ABC 783
5 nombre des côtés

Aire du pentagone = 39° 15′

Corollaire II.

125. On voit donc aussi qu'un polygone régulier est égal à un triangle dont la base est égale à la circonférence de tout le polygone, & la hauteur égale à la perpendiculaire CD abaissée du centre C sur le côté AB. (§. 119.)

Pl. IV. Fig. 86.

Corollaire III.

126. Si l'on vouloit faire dans un cercle un polygone dont les côtés fussent infiniment petits, ils ne laisseroient pas de se trouver renfermés dans la circonférence de ce cercle, & pour lors la hauteur du triangle CD aura du rapport avec le rayon BC; ainsi un cercle seroit égal à un triangle dont la base est égale à la circonférence du cercle, & la hauteur au rayon. (§. 125.)

Corollaire IV.

127. Donc le *Secteur* d'un cercle ACB est égal à un triangle dont la base est l'arc AB, & la hauteur le rayon AC.

Fig. 87.

Corollaire V.

128. Ayant donc la circonférence & le diametre d'un cercle, on trouve l'aire de ce même cercle, en multipliant sa circonférence par la quatrieme partie de son diametre.

Remarque.

129. On a vu dans tous les siecles bien des gens

recercher à l'envi, & prendre une peine infinie pour trouver le véritable rapport du diametre d'un cercle à sa circonférence : en vain y ont-ils consacré la plupart de leurs veilles ; ils n'ont pu réussir jusqu'ici, quoique les Mathématiques soient aujourd'hui infiniment perfectionnées. Quelques-uns cependant ont essayé assez heureusement de déterminer ce rapport par approximation. Archimede dans son traité de la dimension du cercle, proposition seconde, a démontré le premier, que le rapport du diametre à la circonférence est presque le même que celui de 7 à 22 ; mais comme ce rapport peche infiniment par excès dans les grands cercles, d'autres en ont voulu déterminer un plus exact. Personne n'y a plus travaillé que Ludolphe de Ceulen ou de Cologne, qui enfin a trouvé que supposant le diametre d'un cercle de 100 000 000 000 000 000 000, sa circonférence est de 314 159 265 358 979 323 846, peu s'en faut.

Mais comme ces chiffres sont en trop grand nombre, & font une somme trop considérable pour s'en servir à faire un calcul, on prend seulement les trois premiers caracteres de chaque somme, & l'on suppose le rapport du diametre à la circonférence, comme 100 à 314 : en quoi

des cercles, cette différence suffiroit pour les faire distinguer les uns d'avec les autres; ils ne seroient donc pas tous semblables entre eux, contre ce que nous avons démontré ci-dessus. (§. 34.)

Théorême XIX.

130. L'aire d'un cercle est au quarré de son diametre comme 785 à 1000, ou peu s'en faut.

Démonstration.

Le diametre supposé de 100 parties, la circonférence sera de 314 (§. 129); ainsi l'aire du cercle sera de 7850 (§. 128), & le quarré du diametre 10000 (§. 114): par conséquent l'aire sera au quarré comme 7850 à 10000; & en divisant les deux sommes par dix, l'aire sera comme 785 à 1000. (§. 59. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême XX.

131. Les aires des cercles sont entre elles comme les quarrés des diametres sont entre eux.

Démonstration.

L'aire d'un cercle est au quarré de son diametre comme l'aire d'un autre cercle est au quarré de son propre diametre (§. 129, 130). L'aire d'un cercle sera donc à l'égard de l'aire d'un autre cercle comme le quarré du diametre de l'un est au quarré du diametre de l'autre. (§. 83. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XXXVI.

132. Le diametre d'un cercle étant connu, trouver sa circonférence.

Solution.

Cherchez un quatrieme nombre proportionnel à 100, 314, & au diametre donné (§. 85. Arithmét.) : ce nombre trouvé sera la circonférence que l'on cherche. (§. 129.)

Soit, par exemple, le diametre 56'.

100 — 314 — 56
56
1884
1570
$17^{\circ}\ 5'\ 8''\ 4'''$ circonférence du cercle.

Problême XXXVII.

133. Ayant la circonférence d'un cercle ($17584'''$) trouver son diametre.

Solution.

Cherchez un quatrieme nombre proportionnel à 314, 100, & à la circonférence $17584'''$ (§. 85 Arithm.), on trouvera 56, qui est le diametre que l'on cherche.

EXEMPLE.

314 — 100 — 17584
100
1758400

18
104
1758400 — $5^{\circ}\ 6'\ 0''\ 0'''$ diametre.
314444
3111
33

Problême XXXVIII.

134. La circonférence d'un cercle étant connue, ou son diametre, trouver l'aire de ce cercle.

Solution.

1°. Cherchez sa circonférence (§. 132), ou son diametre (§. 133).

2°. Multipliez la circonférence trouvée par la quatrieme partie du diametre (§. 128).

Soit, par exemple, le diametre 5600‴, la circonférence sera 17584‴, & par conséquent l'aire du cercle 24617600‴.

Autrement.

Mutipliez le diametre 56′ par lui-même, & cherchez un quatrieme nombre proportionnel 246176″ (§. 85, Arithm.) à 1000, 785, & le quarré trouvé du diametre 3136, & vous aurez l'aire que vous demandez (§. 130).

Problême XXXIX.

135. Ayant l'aire d'un cercle, trouver son diametre.

Solution.

1°. Cherchez un quatrieme nombre proportionnel 313600 (§. 85, Arithm.) à 785, 1000, & à l'aire donnée 246176.

2°. Extrayez ensuite la racine quarrée 560 (§. 77, Arithm.), cette racine extraite sera le diametre cherché (§. 130).

Corollaire.

136. Sitôt qu'on connoîtra le diametre d'un

cercle, on connoîtra aussi sa circonférence par le problême 36 (§. 132).

Problême XI.

Pl. IV. Fig. 87.

137. Ayant le rayon du cercle AC (6′) avec la grandeur de l'arc AB (6°), trouver l'aire du *Secteur* ABC.

Solution.

1°. Cherchez un quatrieme nombre proportionnel 1884‴ (§. 85 Arithm.), à 100, 314, & au rayon du cercle AC. Ce nombre trouvé est la moitié de la circonférence (§. 132 Géom.) & (§. 59 Arithm.)

2°. Cherchez ensuite un quatrieme nombre proportionnel $62\frac{4}{5}$ (§. 85 Arithm.) à 180°, à l'arc donné 6°, & à la moitié de la circonférence trouvée 1884‴. Ce nombre proportionnel donnera dans les lignes l'arc AB.

3°. Multipliez ce nombre par la moitié du rayon 300″, le produit exprimera l'aire du secteur ABC 18840‴ (§. 122, 127).

Théorême XXI.

Fig. 88.

138. Les deux parallélogrammes ABDC &

(§. 117). Ainsi ces deux parallélogrammes sont entre eux comme les produits de AC par CD, & de AC par DF, c'est-à-dire comme CD à DF (§. 59 Arithm.) *Premiere partie du théorême qu'il falloit démontrer.*

On démontre de la même maniere, que les parallélogrammes dont les bases sont égales, sont entre eux comme leurs hauteurs sont entre elles.

Corollaire.

139. Tout triangle pouvant être considéré comme la moitié d'un parallélogramme (§. 120), les triangles de même hauteur seront entre eux comme leurs bases; & ceux qui auront les mêmes bases seront en même raison que leurs hauteurs.

Problême XLI.

140. Diviser le parallélogramme ABEC en deux parties égales, en tirant un ligne droite du point donné D. Pl. V. Fig. 89.

Solution.

Faites EF = AD, & tirez la droite DF, vous aurez les trapezes ADFC & DBEF égaux entre eux.

Démonstration.

Les triangles ABC & BCE sont égaux (§. 102): & comme AB est égal & parallele à EC (§. 102), & EF = AD, on voit que $o = x$, $y = u$ (§. 72), & FC = DB (§. 25 Arithm.) donc le △DBG = △GCF (§. 50), & par conséquent le trapeze ACFD est égal au trapeze DFEB (§. 24, 25 Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

l'angle ACE est égal à l'angle BCF (§. 24 Arithm.), parceque ACF = BCE = 90° (§. 20, 37) : donc les triangles ACE & BCF sont égaux (§. 49), & par conséquent le quarré BDEC sera aussi égal au rectangle LCFK (§. 26 Arithm.)

Et comme on démontre par la même méthode que le quarré AHIB est égal au rectangle ALKG, il est évident que les quarrés AHIB & BCDE pris ensemble équivalent le quarré AGFC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

145. On nomme *Théorême de Pythagore* le Théorême ci-dessus, parcequ'on croit qu'il en est l'inventeur. Quelques-uns l'appellent le *Maître des Mathématiques*, à cause du grand usage qu'on en fait dans toutes les parties qui composent les Mathématiques.

Problême XLIV.

146. Construire un quarré égal à deux ou plusieurs pris ensemble.

Solution.

Pl IV. Fig. 92.

1°. Joignez à angles droits les côtés de deux quarrés AB & BC (§. 70, 89).

2°. Tirez la ligne droite AC, qui sera le côté d'un quarré égal aux deux autres pris ensemble (§. 144).

3° Elevez avec une équerre sur le côté du troisieme quarré CD la ligne CE = CA.

4°. Tirez la droite DE qui sera le côté d'un

quarré égal aux trois autres pris ensemble (§. 144).

Théorême XXIII.

147. Si les angles homologues d'une figure rectiligne sont égaux, & que les droites qui les séparent aient de part & d'autre le même rapport, les figures sont semblables : & si les figures sont semblables, les angles & les côtés seront comme nous venons de dire.

Démonstration.

Les figures rectilignes ne se distinguent que par la grandeur de leurs angles homologues, & le rapport qu'ont entre eux les côtés qui les séparent; car on n'y connoît que cela distinctement. Si les angles sont donc égaux, & que les côtés aient entre eux le même rapport, on y voit précisément ce par quoi on les distingue. Ils sont par conséquent semblables (§. 4.)

Si deux figures sont semblables, on y remarque ce qui les fait distinguer : or on ne distingue les figures rectilignes que par la quantité de leurs angles homologues, & par le rapport que les côtés ont entre eux ; la grandeur des angles & le rapport des côtés doivent donc être les mêmes de part & d'autre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême XXIV.

148. Si dans les deux triangles ABC & DEF, B est égal à D & C = E, on aura BA : AC = DF : EF & AB : BC = FD : DE; & si les côtés sont proportionnels, les angles homologues seront aussi égaux.

Pl. IV. Fig. 93.

Démonstration.

Comme B = D, & C = E, & que de deux angles donnés avec un côté on peut construire un triangle (§. 60), les triangles B A C & D F E se font de la même maniere ; ils sont donc semblables (§. 33) ; par conséquent B A : A C = F D : F E, & A B : B C = F D : D E (§. 147.) *Premiere partie démontrée.*

Dans la seconde, les trois côtés d'un triangle sont proportionnels aux trois côtés de l'autre, & de ces trois côtés on peut former un triangle (§. 55). Les triangles A B C & D F E se faisant par la même méthode, sont donc semblables (§. 33) : par conséquent leurs angles homologues sont égaux. (§. 147.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême XXV.

Pl. IV. Fig. 93.

149. Si dans le triangle A B C on tire la droite D E parallele à la base B C, A D sera à A E comme A B à A C, & ce que B D est à E C, A D : D E = A B : B C.

Démonstration.

D E étant parallele à B C, $o = x$ & $u = y$ (§. 72) ; de là A D : A E = A B : A C, & A D : D E = A B : B C (§. 148) ; par conséquent parceque A D : A B = A E : A C (§. 83, Arithm.), A D : A E = B D : E C. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XLV.

Fig. 94.

150. Trouver une troisieme proportionnelle à deux lignes données A B & A C.

Solution.

1°. Faites à volonté l'angle E A D, & transportez la ligne A C de A en C; & de A en B, aussi bien que du point C, transportez en E la ligne A B.

2°. De C en B, tirez la droite C B, & de E en D la droite D E parallele à C B; si l'on fait donc l'angle E égal à l'angle C (§. 8) (§. 73), B D sera la troisieme proportionnelle que l'on cherche.

Problême XLVI.

151. Trouver une quatrieme proportionnelle aux trois lignes données A B, A C, & B D. Pl. IV. Fig. 95.

Solution.

1°. Formez à volonté l'angle E A D.

2°. Transportez la ligne A B de A en B, la ligne A C de A en C, & de B en D la ligne B D.

3°. Tirez de B à C la droite marquée B C.

4°. De D tirez l'autre droite D E parallele à B D, comme dans le Problême précédent, & C E sera la quatrieme proportionelle. (§. 149.)

Théorême XXVI.

152. Si dans les deux triangles A B C & F D E, B est égal à D & A B : B C = F D : D E, A sera aussi égal à F, & C = E, & B A : A C = D F : F E. Fig. 93.

Démonstration.

Puisque B = D & A B : B C = F D : D E, &

que de deux côtés réunis par un angle on peut former un triangle (§. 58); les triangles ABC & FDE se faisant par la même méthode, sont semblables (§. 33); par conséquent A = F, C = E & BA : AC = DF : FE. (§. 147.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

153. Les Théorêmes sur la ressemblance & l'égalité des triangles sont d'une très grande utilité dans les mathématiques. Ils font trouver quantité de choses, particuliérement quand ils s'agit de pratiquer la géométrie sur un terrein; car presque toute cette pratique est fondée sur ces principes, comme on le verra dans la suite.

Problême XLVII.

Pl. V. Fig. 96.

154. Diviser une ligne droite donnée en autant de parties qu'on voudra.

Solution.

1°. Tirez la droite CD longue à volonté, & transportez-y autant de parties égales que vous en devez trouver dans la ligne donnée, par exemple, cinq.

2°. Construisez sur CD un triangle équilatéral CED. (§. 55.)

3°. Transportez de E en A & de E en B la ligne donnée à diviser, & tirez la droite AB qui sera la ligne donnée.

4°. Tirez enfin des droites du sommet de l'angle à chaque point de division de la ligne CD,

& AF sera la cinquieme partie de la ligne donnée AB.

Démonstration.

Puisque EA : EB = EC : ED, on a A = C & EA : AB = EC : CD (§. 152). Or EC = CD : donc EA = AB; par conséquent AB = à la ligne donnée. Comme donc EA : AF = CD : CG (§. 148), c'est-à-dire, AB : AF = CD : CG, & CG = $\frac{1}{5}$ CD, on aura aussi AF = $\frac{1}{5}$ AB. (§. 53, Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autre Démonstration.

Le triangle CED peut être considéré comme renfermé dans un cercle dont le centre seroit E, & le triangle AEB peut être aussi considéré comme renfermé dans un petit cercle concentrique au grand. Et comme tous les rayons partis du centre diviseroient nécessairement la circonférence du cercle concentrique en autant de parties que la circonférence du grand cercle, il est évident que le petit triangle AEB est divisé par les rayons partis du centre, en autant de parties que le triangle CED; par conséquent la ligne donnée AB est divisée en cinq parties égales, parceque la ligne CD est divisée également en autant de parties. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XLVIII.

155. Couper une ligne droite donnée en même proportion qu'une autre CD a été coupée. Pl. V. Fig. 97.

Solution.

1°. Formez un triangle équilatéral sur la ligne coupée C D. (§. 53.)

2°. Transportez la ligne donnée de E en A & B, tirez ensuite la droite A B qui sera égale à la ligne donnée.

3°. Tirez du sommet du triangle E des lignes droites aux points de division G, I. Ces lignes couperont la ligne A B en proportion requise.

Démonstration.

Elle est la même que celle du Problême précédent.

Remarque.

156. Le Problême précédent est d'un très grand usage tant dans l'architecture militaire que civile, particuliérement quand il s'agit d'agrandir ou de diminuer un plan.

Problême XLIX.

Pl. VI. Fig. 109. & Pl. VII. Fig. 110.

157. Diviser un parallélogramme ou un triangle en autant de parties égales qu'on voudra.

Solution.

1°. Divisez la base C D ou C B en autant de parties que la figure doit être divisée. (§. 154.)

Fig. 109. 2°. Si c'est un parallélogramme, tirez de chaque point de division 1, 2, des paralleles au Fig. 110. côté A C. 1, 1. 2, 2. (§. 67). Si c'est un triangle,

tirez des droites des points de division 1, 2 au sommet A, & chaque figure sera divisée en parties égales. (§. 158. 159.)

Problême L.

158. Trouver une moyenne proportionelle entre deux lignes données AB & BE.

Pl. VII. Fig. 111.

Solution.

1°. Joignez en ligne droite & bout à bout les deux lignes données, & divisez leur longeur commune AE en deux parties égales au point C. (§. 90.)

2°. De C comme centre décrivez un demi-cercle dont le diametre soit AE.

3°. Au point B élevez la perpendiculaire BD (§. 70), qui sera la moyenne proportionnelle demandée.

Démonstration.

L'angle ADE est droit (§. 86), ABD est aussi un angle droit (§. 18), l'angle DAB est commun aux deux triangles DAB & DAE. L'angle DAE est donc égal à l'angle DEB (§. 78). Or dans le triangle DEB, l'angle DBE est aussi droit (§. 18) : AB est donc à BD comme BD à BE. (§. 148.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque I.

159. Si l'on prenoit une ligne pour une unité, & qu'on exprimât un nombre donné par une autre ligne, on pourroit en extraire facilement la racine

quarrée, en se servant de l'échelle géométrique, & de la méthode qu'on a employée dans le problême ci-dessus. (§. 74, Arithm.)

Remarque II.

160. On peut faire aussi la regle de trois par le moyen des lignes, en suivant ce que nous avons dit au Problême 46. (. 151.).

Problême LI.

Pl. VII. Fig. 112. 161. La corde d'un arc AB, & sa hauteur DF étant données, trouver le diametre ED, & par conséquent le centre du cercle C.

Solution & Démonstration.

1°. Cherchez une troisieme proportionnelle à FC & FB (§. 85, Arithm.) pour avoir EFD. (§. 158).

2°. Ajoutez à EF la hauteur de l'arc DF, & vous aurez le diametre ED.

3°. Coupez le diametre en deux parties égales pour avoir le rayon EC qui donne le centre.

EXEMPLE.

Soit DF 8′ 3″ FB 1° 6′ 6″.

```
83 — 166 — 166
        166     x
   -----------
        996     zz
       996      366
       166      27556
   --------     8333
      27556     88
```

```
332″ EF
 83  DF
------
415″ ED
2) 2075‴ EC
```

Remarque.

Remarque.

162. Ce problême est en usage dans l'Architecture civile, quand il s'agit de faire des portes & des fenêtres en forme d'arc.

Problême LII.

163. Ayant la corde d'un arc AB avec sa hauteur DF, trouver l'aire du segment ADBFA.

Pl. VII. Fig. 112.

Solution.

1°. Cherchez d'abord le diametre DE (§. 161), décrivez ensuite le cercle, auquel vous appliquerez la corde AB.

2°. Mesurez avec le rapporteur l'angle ACB (§. 43).

3°. De la corde donnée AB & de la différence FC qui se trouve entre la hauteur de l'arc FD & le rayon DC, cherchez l'aire du triangle ABC (§. 122).

4°. Soustrayez enfin le triangle ACB du secteur ACBDA, le reste sera le segment ADBFA.

Soit pour exemple,

AB 600‴, DF 80‴; DE sera 1205‴, l'arc AB 60°, l'aire du secteur ACBDA sera donc 189630‴. Or comme FC 522‴, AF 300‴, le △ ACB sera 156600‴, & par conséquent le segment AFBDA 33030‴.

Problême LIII.

164. Construire l'*échelle géométrique*.

Regle.

Pl. V. Fig. 98.

1°. Tirez la droite AE ; transportez sur cette ligne dix parties égales prises à volonté, en commençant depuis A, la dixieme sera B. Vous prendrez ensuite la distance AB que vous transporterez de B en E autant de fois qu'il vous plaira.

2°. Elevez au point A la perpendiculaire AC, que vous diviserez aussi en dix parties égales & arbitraires (§. 70).

3°. De chaque point de division menez des paralleles à AE (§. 67), & sur la derniere CF vous transporterez de C en D les dix parties égales AB.

4°. Joignez par des lignes droites la premiere partie à gauche marquée 10 avec la seconde à droite marquée 9, puis 9 de la gauche avec 8 de la droite, ensuite 8 de la gauche avec 7 de la droite ; & ainsi de suite comme la figure le marque.

Il est évident que si AB est supposé être une longueur de dix pieds, les parties B 1 ; 1, 2 ; 2, 3, &c. seront des pieds. A l'égard des petits chiffres qui sont au haut de la figure sur les divisions perpendiculaires, 9, 9 vaudra un pouce ; 8, 8 deux pouces ; 7, 7 trois pouces ; 6, 6 quatre pou-

me A 9 = $\frac{1}{10}$ A C, on aura donc 9, 9 = $\frac{1}{10}$ C 9, & par conféquent un pouce (§. 9), &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

La mefure géométrique étant divifée en dix, on peut confidérer ces parties comme des pieds. Mais dans ce cas, pour entendre la démonftration précédente, il faut fuppofer que le pied n'eft compofé que de dix pouces; ce dont il faut bien fe fouvenir, parceque M. Wolf fe fervant communément de cette maniere de compter, la plupart de fes calculs, folutions, ou démonftrations feroient inintelligibles fans cette attention. J'ai cependant réduit prefque par-tout fes calculs à la maniere de compter ufitée en France.

Corollaire.

165. Si l'on mét donc la jambe d'un compas fur la troifieme ou feptieme ligne, & qu'on l'ouvre jufqu'à ce que l'autre jambe tombe fur la ligne droite menée au-deffous de la cinquieme divifion, cette ouverture donnera 5 pieds 3 ou 7 pouces. Ou bien fi je veux avoir 2° 3″ & 5‴, je poferai une jambe du compas fur la cinquieme parallele à A E au point I, & j'ouvrirai le compas jufqu'à ce qu'il rencontre K fur la même parallele: cette ouverture de compas me donnera ce que je demande.

Problême LIV.

166. Mefurer la diftance des deux lieux A & B acceffibles par un troifieme C.

Pl. V. Fig. 99.

1°. Posez en C le graphometre ou table géométrique sur laquelle vous choisirez le point *c*.

2°. De ce point, par le moyen des pinnules, visez au point A, & menez la droite *c a*.

3°. Bornoyez ensuite du point *c* vers B, & menez la droite *c b*.

4°. Mesurez les toises qui se trouvent depuis C jusqu'à A, & depuis C jusqu'à B; transportez ces mesures, au moyen de l'échelle géométrique, de *c* en *a* & de *c* en *b*.

5°. Mesurez enfin sur la même échelle la ligne *ab*, qui marquera la distance que vous cherchez.

Démonstration.

L'angle *c* étant commun aux deux triangles *acb* & A*c*B, & les côtés qui le forment étant aussi proportionnels, on doit conclure que *ab* est à AB comme *ca* est à *c*A (§. 152). Or *ca* contient autant de parties de l'échelle ou petite mesure que *c*A en contient de la grande : *ab* contiendra donc autant de parties de la petite mesure que AB en contiendra de la grande dont on s'est servi sur le terrein.

Autre solution.

1°. Ayant posé le graphometre en C, mesurez l'angle A*c*B (§. 43).

2°. Mesurez aussi les lignes *c*A & *c*B (§. 44).

3°. A l'aide du rapporteur & de l'échelle géométrique construisez l'angle *acb* (§. 58).

4°. Mesurez la ligne *ab* sur l'échelle géométrique (§. 164), vous connoîtrez par là combien la ligne AB contient de toises, pieds & pouces, &c.

Démonstration.

Elle revient au même que celle que j'ai donnée à la premiere solution.

Problême LV.

Pl. V. Fig. 100.

167. Trouver la distance de deux lieux A & B, dont un seul A est accessible.

Solution.

1°. Ayant posé le graphometre dans un lieu choisi à volonté C, dirigez votre vue par les pinnules du point *c* vers les deux points A & B.

2°. Cherchez la distance de C au point accessible A.

3°. Transportez cette distance avec une échelle géométrique de *c* en *a* (§. 164).

4°. Placez ensuite le graphometre au point A, en sorte que *a* soit précisément sur A, & que vous puissiez voir un piquet planté au point C par les pinnules dirigées de *a* vers *c*.

5°. Bornoyez alors de *a* vers B, & tirez la droite *ab*.

6°. Prenez enfin sur l'échelle géométrique (§. 164) la distance de *ab*, qui vous fera connoître celle de AB.

Démonstration.

Puisque l'angle *c* = C & l'angle *a* = A, *ac* sera à l'égard de AC comme *ab* est à AB (§. 148). Or la ligne *ac* contient autant de parties de l'échelle geométrique, ou petite mesure, que la ligne AC en contient de la grande : *ab* doit donc contenir autant de parties de la petite me-

ſure, ou échelle géométrique, que A B en renferme de la grande. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

On entend par *grande meſure* une toiſe ou perche, qui ſeroit diviſée en pieds, pouces, &c. comme elles le ſont communément. Il faut auſſi remarquer que ſi l'échelle géométrique ou petite meſure dont on ſe ſert eſt diviſée par 10, il faudra, ou que la perche qui ſert à meſurer en grand les diſtances, ſoit auſſi diviſée par 10 pieds ou parties, ou faire la réduction en comparant la grande meſure avec la petite. Par exemple, ſuppoſé qu'on ſe ſerve d'une toiſe ordinaire compoſée de 6 pieds qui contiennent chacun 12 pouces, pour meſurer la diſtance *c* A de l'exemple ci-deſſus, & que cette diſtance ſoit de ſix toiſes 4 pouces : ſi mon échelle géométrique, au lieu d'être diviſée par toiſes de ſix pieds, eſt diviſée par meſures géométriques de dix parties, qu'on peut conſidérer comme des pieds ; pour réuſſir à comparer proportionnellement le nombre des toiſes qui ſe trouvent dans la diſtance *c* A avec le nombre des parties qui ſont compriſes dans l'échelle géométrique, dont les diviſions ſont de dix en dix, il faudra dans ce cas réduire les toiſes en pieds, &

Pl. V. Fig. 100.



Autre maniere de résoudre le problême ci-dessus.

1°. Mesurez avec le graphometre les angles C & A (§. 43), & la longueur A C. (§. 44.) Pl. V Fig. 100.

2°. De ces distances connues construisez le triangle *acb* (§. 60), par le moyen du rapporteur & de l'échelle géométrique.

3°. Mesurez ensuite la ligne *ab* selon les divisions de l'échelle géométrique, & vous connoîtrez ainsi la distance AB.

Démonstration.

Elle est la même que celle que j'ai donnée en dernier lieu.

Problême LVI.

168. Mesurer la distance de deux lieux inaccessibles A B. Fig. 101.

Solution.

1°. Ayant choisi les deux stations C & D, placez le graphometre à la premiere C, & plantez un piquet à l'autre.

2°. Du point C bornoyez par les pinnules vers le piquet D, & puis du même point C ayant aussi bornoyé vers B & A, tirez les lignes droites sur le graphometre.

3°. Prenez la distance des stations C, D (§. 44), & portez-la sur le graphometre de *c* en *d*, par le moyen de l'échelle géométrique.

4°. Visez de D vers A & B, & tirez sur le graphometre les droites *da* & *db*.

5°. Prenez ensuite la distance $a b$ sur l'échelle géométrique (§. 164), & vous connoîtrez ainsi la distance A B.

Démonstration.

Comme l'angle d est commun aux deux triangles $d c b$ & D C B, & que l'angle c est égal à l'angle C, $c d$ est à C D comme $b c$ est à B C (§. 148). Dailleurs comme par la même raison le triangle $a c d$ est semblable au triangle A C D, $c d$ sera à C D comme $a c$ est à A C (§. 148); & par conséquent $b c$ est à B C, comme $a c$ à A C. (§. 57, Arithm.)

Or l'angle $a c b$ étant égal à l'angle A C B, $a b$ sera à A B come $a c$ est à A C (§. 152), ou $c d$ à C D (§. 57, Arithm.). Et comme dans l'échelle géométrique autant de parties répondent à la droite $d c$, qu'il s'en trouve dans la grande mesure qui répondent à la droite D C, il en faut autant dans l'échelle géométrique qui répondent à la ligne $a b$, qu'il s'en trouvera qui répondent à A B dans la grande mesure dont on s'est servi sur le terrein.

Autre solution du même problême.

Pl. VI. Fig. 102.

1°. Mesurez les angles x & y de la premiere station C, & les angles z & w de la *seconde* D (§. 43); leurs sommes donneront les angles A C D & B D C.

2°. Prenez ensuite la distance de C D (§. 44), que vous porterez sur le papier au moyen de l'échelle géométrique, & avec les angles x & $z + w$, formez le triangle B C D, puis l'autre A C D avec les angles z & $x + y$. (§. 60.)

3°. Mesurez enfin la ligne A B sur l'échelle géométrique, & vous trouverez la distance que vous cherchez.

Démonstration.

On démontre cette seconde solution par le même raisonnement que l'on a apporté pour démontrer la premiere.

Remarque.

169. On mesurera diverses distances par la même méthode, si de deux stations marquées on bornoie à chaque lieu en particulier.

Problême L V I I.

170. Mesurer la hauteur accessible A B.

Pl. VI. Fig. 103.

Solution.

1°. Prenez un point D dans la campagne sur lequel vous éleverez verticalement votre graphometre ou *planchette*, de façon que le côté inférieur soit parallele à l'horizon : situation qu'on lui donnera avec un *niveau*.

2°. Ayant appliqué horizontalement une regle avec des pinnules sur le centre, vous bornoierez à travers, du côté de l'endroit dont vous cherchez à connoître la hauteur, & vous menerez ensuite la droite *a* E.

3°. Tournez la regle autour du point *a* jusqu'à ce qu'en regardant par les pinnules, vous apperceviez le sommet de la hauteur A, & pour lors vous menerez sur le graphometre la droite *a b*.

4°. Mesurez la distance qu'il y a depuis *a* jus-

ques au bas de la hauteur C (§. 44), & portez-la sur le graphometre de *a* en E, par le moyen de l'échelle géométrique.

5°. Elevez au point E la perpendiculaire E*b* (§. 70), qui marquera par son application sur l'échelle géométrique la hauteur A C. (§. 164.)

6°. Ajoutez à cette hauteur celle de C B, & la somme sera celle que vous demandez.

Démonstration.

L'angle *a* est commun aux deux triangles E*ab* & C*a*A : les angles E, C sont droits : ainsi *a* E est à *a* C comme *b* E est à A C (§. 148). Or E *a* contient autant de parties de l'échelle géométrique que *a* C en contient de la grande mesure ; E*b* contiendra donc nécessairement autant de parties de l'échelle géométrique, que A C en contient de la grande mesure dont on s'est servi pour mesurer le terrein.

Autre solution du même problême.

Pl. VI. Fig. 103. 1°. Mesurez l'angle *a* (§. 43), & la distance des stations *a* C ou D B. (§. 44.)

2°. De ces mesures trouvées, formez le triangle *e b a*. (§. 60.)

3°. Prenez la mesure de la hauteur *b e* sur l'échelle géométrique, & vous aurez la hauteur A C.

4°. Ajoutez à A C la hauteur de l'instrument, la somme vous donnera la même hauteur A B.

Démonstration.

Elle est la même que la précédente.

Remarque.

171. On ſuppoſe dans toutes ces ſolutions de problême que la ligne DB eſt horizontale : car ſi l'inſtrument étoit poſé plus haut ou plus bas que la hauteur AB, il faudroit auſſi meſurer l'angle C*a*B, & conſtruire le triangle C*a*B ſur le papier par le moyen de l'échelle géométrique, puis l'ajouter à la hauteur, ſi l'inſtrument eſt plus haut, ou l'en retrancher, s'il étoit placé plus bas que A.

Problême XVIII.

172. Meſurer une hauteur inacceſſible AB. Pl. VI. Fig. 104.

Solution.

1°. Après avoir choiſi à volonté les deux ſtations D & E, comme dans le problême précédent, bornoyez vers la pointe A, & le bas C, étant placé à la premiere ſtation D.

2°. Meſurez la diſtance des deux ſtations E, D (§. 44), & portez-la, par le moyen de l'échelle géométrique, du point *f*, qui doit répondre perpendiculairement ſur D, au point *e*. (§. 164.)

3°. Tranſportez le graphometre de D en E, & poſez-le de façon que *e* ſoit préciſément ſur E, & viſez enſuite au piquet que vous aurez planté en D, & au ſommet A.

4°. Au point où la droite *ea* coupe la droite *fa*, abaiſſez une perpendiculaire *ac* ſur *fe* (§. 69.), qui, portée ſur l'échelle géométrique, donnera la hauteur AC.

5°. Ajoutez à AC la hauteur BC, la ſomme ſera la hauteur AB que l'on demande.

Démonstration.

On démontre cette solution comme celle du problême précédent.

Autre méthode pour résoudre le même problême.

Pl. VI. Fig. 104. 1°. Mesurez à la premiere station D l'angle *f*, & à la seconde E l'angle *e* (§. 43) ; prenez aussi la distance des stations E, D (§. 44) que vous transporterez sur le papier selon l'échelle géométrique (§. 164.)

Fig. 105. 2°. Construisez-y le triangle *f e a* par le moyen des angles *e* & *f*. (§. 60.)

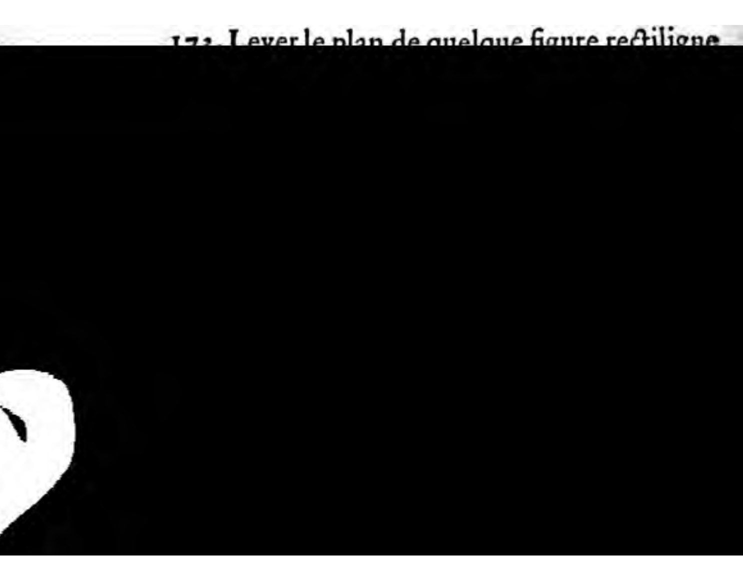
3°. Prolongez la base *f e* jusques en *c*, & abaissez de *a* la perpendiculaire *a c*. (§. 69.)

4°. Mesurez enfin *a c* sur l'échelle géométrique (§. 164), & ajoutez la hauteur de l'instrument d'où vous avez pris la quantité des angles, ou faites attention à ce que nous avons dit (§. 171), & vous aurez ainsi la hauteur que vous souhaitiez.

La démonstration est la même que la précédente.

Problême LIX.

172. Lever le plan de quelque figure rectiligne



trique, & vous en formerez votre figure. (§. 164 & 111.)

Démonstration.

Lorsqu'on veut transporter le plan d'une figure sur le papier, on doit l'y dessiner de façon que chaque angle & chaque coté de la figure dessinée soient égaux en petit à chaque angle & chaque côté de la grande figure auxquels ils répondent. Si donc pour faire chaque côté des triangles ABC, ACD, ADE, on prend sur l'échelle géométrique autant de parties qu'il s'en trouve sur le terrein qui forment chaque côté de la grande figure, les côtés de la petite seront entre eux comme les côtés de la grande. Car si, par exemple, le côté AB en a *6* & BC 7 sur le terrein, le côté AB sur le papier en aura aussi *6*, & BC 7 : & par conséquent tant dans l'une que dans l'autre figure, AB sera à BC comme *6* est à 7 : les angles & les côtés de la petite figure seront donc égaux proportionnellement à ceux de la grande (§. 148); & puisque les angles de la figure conviennent avec ceux des triangles, il faut nécessairement que les angles de la petite figure soient égaux à ceux de la grande qui est sur le terrein. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autre méthode pour résoudre le problême.

1°. Placez le graphometre à un point F choisi dans la figure.

Pl. VI. Fig. 107.

2°. Bornoyez du point F vers chaque piquet que vous aurez eu soin de planter auparavant à chaque angle de la figure A, B, C, D, E; menez ensuite les droites F*a*, F*b*, F*c*, F*d*, F*e*.

3°. Prenez la mesure des lignes F A, F B, F C, F D, F E. (§. 144.)

4°. Déterminez, par le moyen de l'échelle géométrique, les lignes F a, F b, F c, &c. (§. 164.)

5°. Menez enfin les lignes droites ab, bc, cd, de, & ea; & vous aurez sur le papier le plan de la figure A B C, &c.

Démonstration.

Dans le triangle a F b on voit que F a est à F b comme F A est à F B dans le triangle A F D, & que l'angle F est commun aux deux triangles : F b est donc à F B comme ba est à B A (§. 152.). On démontre par la même raison que F b est à F B, comme bc à B C (§. 57, Arithm.). D'ailleurs l'angle A B C est égal à l'angle abc (§. 152). Et comme on démontre par la même raison que les autres angles c, d, e, a, sont égaux aux angles C, D, E, A, & que les autres côtés sont entre eux comme les côtés C D, D E, E A, il est évident que le plan est juste. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Troisieme méthode.

Pl. VI. Fig. 107.

1°. Du point F mesurez les angles A F B, B F C, C F D, D F E, E F A. (§. 43.). Mesurez aussi les lignes F A, F B, F C, F D & F E. (§. 44.)

2°. Portez les angles (§. 48) & les lignes sur le papier par le moyen de l'échelle géométrique. (§. 164.)

3°. Mesurez les droites ab, bc, cd, de & ea, & vous aurez la figure telle que vous la demandez.

Démonstration.

Voyez la précédente.

Problême LX.

174. Lever le plan de la figure ABCDE que l'on peut voir toute entiere des deux stations A & B.

Pl. VI. Fig. 108.

Solution.

1°. Ayant posé votre graphometre en A, bornoyez vers tous les angles de la figure, B, C, D & E, & menez des lignes du point A vers tous ces angles.

2°. Mesurez la distance des stations A, B (§. 44), & portez-les sur le graphometre par le moyen de l'échelle géométrique (§. 164) de A en *b*.

3°. Transportez l'instrument de A en B & placez-le de façon que le point *b* réponde perpendiculairement à B, & qu'en visant par les pinnules de la regle appliquée sur la ligne *b* A, vous puissiez voir le piquet que vous aurez eu soin de planter en A après en avoir ôté le graphometre.

4°. Visez ensuite de B vers tous les autres angles de la figure en particulier, & menez des droites qui couperont les premieres en *e*, *d*, *c*.

5°. Tirez enfin les droites *e d*, *d c*, après quoi le plan sera levé.

Démonstration.

Elle est presque la même que celle du problême 56. (§. 168.)

Seconde méthode.

Pl. VI. Fig. 108. 1°. De A mesurez les angles C A B, D A C, E A D; & de B mesurez aussi les angles E B A, D B E, C B D (§. 43), puis encore la distance A B. (§. 44.)

2°. Marquez sur le papier la ligne *a b*, & par le moyen de l'échelle géométrique (§. 164), portez-y la longueur de la ligne A B.

3°. Transportez en *b a c*, *c a d*, *d a e*, les angles C A B, D A C & E A D : & en *a b e*, *e b d*, *d b c* les angles A B E, E B D, D B C. (§. 48.)

4°. Joignez enfin par des droites les points *a*, *e*, *d*, *c*, *b*, & pour lors vous aurez tout le plan de la figure.

Démonstration.

Voyez celle du problême 56. (§. 168.)

Problême LXI.

Fig. 108. 175. Lever le plan d'une figure dont on peut faire le tour, comme A B C D E.

Solution.

1°. Après avoir placé le graphometre au point A, bornoyez vers les piquets plantés en B & E, afin de pouvoir marquer sur ce point l'angle BAE ou *b a e*.

2°. Prenez la mesure des droites A B & A E (§. 44), & transportez-la sur le graphometre de *a* en *b* & *e*, à l'aide de l'échelle (§. 164.)

3°. Transportez l'instrument en B, de maniere que *b* soit perpendiculaire à B, bornoyez ensuite vers A & vers C, afin de pouvoir marquer sur le graphometre l'angle B C A.

4°.

4°. Prenez la mesure de la ligne BC (§. 44), & portez-la sur l'instrument de *b* en *c* (§. 164); & en faisant ainsi le tour de la figure vous en aurez levé tout le plan.

Démonstration.

Tous les angles de la figure marquée sur le graphometre sont égaux à ceux de la figure représentée sur le terrein, & les côtés de la petite sont entre eux comme les côtés de la grande : la petite est donc semblable à la grande (§. 147). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autrement.

Mesurez tous les côtés (§. 44) & autant d'angles qu'il y a de côtés, excepté trois (§. 43) : car il est aisé de lever un plan dont on connoît les côtés & les angles (§. 112).

Problême LXII.

176. Trouver l'aire de quelque terrein ou champ que ce puisse être.

Solution.

1°. Levez d'abord le plan du terrein selon la méthode marquée dans les problêmes précédents.

2°. Cherchez l'aire de la figure selon la solution du problême 35 (§. 123).

DÉFINITION XVI.

177. La sphere se forme en faisant tourner le demi-cercle ACB autour du diametre AB. Pl. VII. Fig. 115.

Corollaire.

178. Tous les points de la superficie d'une

ſphere ſont donc dans une égale diſtance du centre (§. 13).

Définition XVII.

Pl. VII. Fig. 114. 179. Une figure rectiligne ABC, dont les lignes droites AD ſont portées de haut en bas, ou de bas en haut, par un mouvement toujours parallele à lui-même, repréſente un *priſme*, qui eſt un corps ſolide terminé aux deux bouts par des plans polygones, égaux, ſemblables & paralleles, & dans ſa longueur par autant de parallélogrammes qu'il y a de côtés aux deux polygones qu'on nomme les *baſes*. Quand ces deux baſes ſont des triangles, le priſme ſe nomme triangulaire; tel eſt celui qui eſt repréſenté dans la figure citée à la marge.

Remarque.

On nomme *priſmatique* ce qui a la figure d'un priſme, ou qui a quelque rapport au priſme, & *verres priſmatiques* ceux dont on ſe ſert pour ſéparer les rayons de la lumiere. On appelle auſſi *couleurs priſmatiques* les rayons colorés de lumiere qu'un priſme de verre fait appercevoir.

Fig. 115. Si le cercle X eſt porté de bas en haut, ou de haut en bas en ſuivant la droite FG, il forme la figure d'un cylindre : la même choſe arrive quand Fig. 116. un rectangle ABCD ou un quarré *tourne* autour de ſa hauteur BC.

Corollaire I.

180. Tout cylindre eſt donc un ſolide compoſé de pluſieurs plans circulaires égaux & concentriques · le premier & le dernier de ces cercles prendront le nom de *baſes*, & la ligne BC, qui paſſe

par tous les centres, se nomme l'*axe* du cylindre.

Cylindrique se dit d'une figure ou corps solide qui a la forme d'un cylindre ; ce qui doit s'entendre d'une cavité comme d'un corps solide. Pl. VII. Fig. 115.

Un corps de pompe doit être intérieurement bien cylindrique. Tout prisme a deux bases & est terminé tout à l'entour par autant de parallélogrammes que sa base a de côtés.

Corollaire II.

181. Toutes les sections d'un prisme ou d'un cylindre, paralleles à la base, sont égales entre elles.

DÉFINITION XVIII.

182. Si le rectangle ABCD est porté en droite ligne de A en E, il décrit un *parallélipipede ;* & si le quarré O est pareillement porté de H en I, il forme le *cube*. Fig. 117. Fig. 118.

Corollaire I.

183. Le parallélipipede est donc terminé par six rectangles, dont les deux côtés opposés sont égaux entre eux, & les sections de la base sont paralleles entre elles.

Corollaire II.

184. Le cube ou *exaëdre* est donc terminé par six *faces* ou quarrés égaux entre eux : tel est un dé à jouer.

DÉFINITION XIX.

185. Si le triangle rectangle ABC fait une révolution sur un de ses côtés immobile AB, il décrit le *cône*. Fig. 119.

Corollaire.

186. Toutes les ſections paralleles à la baſe d'un cône ſont des cercles, d'autant plus petits qu'ils approchent plus du *ſommet* ou de la *pointe* A. La ligne AB ſe nomme *axe* du cône, & le cercle DBC ſa *baſe*.

On appelle auſſi *cône* un ſolide qui eſt produit par le mouvement d'un triangle obliquangle, c'eſt-à dire qui n'a point d'angle droit : & alors pour le diſtinguer d'avec le précédent, que l'on peut appeller *cône droit*, on le nomme *cône incliné* comme GHI, qui eſt produit par le mouvement du triangle obliquangle GOH autour du côté immobile GO.

Pl. VII. Fig. 120.

Definition XX.

Fig. 121.

187. Si l'on mene la droite AD, fixée par une de ſes extrémités au point D, tout autour de la circonférence d'une figure rectiligne ABC, elle décrit la figure d'une *pyramide*.

Corollaire.

188. La *pyramide* eſt un ſolide à pluſieurs faces, qui a pour *baſe* une figure rectiligne, & qui eſt terminé par autant de triangles que la baſe a de côtés, mais qui vont toujours en diminuant aboutir au point D. Si la figure ABC eſt circulaire, le mouvement de la droite AB formera un *cône*.

Définition XXI.

189. Un *corps régulier* eſt un ſolide terminé par des plans égaux, réguliers, de même eſpece, dont les angles ſolides ſont égaux entre eux. Les autres corps ſe nomment *irréguliers*.

DÉFINITION XXII.

190. Outre le cube (§. 182) il y a encore quatre autres sortes de corps réguliers, à savoir le *Tétraëdre* composé de quatre triangles équilatéraux; l'*Octoaëdre*, de huit; l'*Icosaëdre*, de vingt; & le *Dodécaëdre* formé par douze pentagones.

Pl. VII. Fig. 122, 123, 125 & 126.

Problême LXIII.

191. Déterminer la solidité d'un cube.

Solution.

On mesure les solides avec une *perche cubique*, c'est-à-dire, un cube dont chaque côté est une perche de long & de large, qu'on nomme encore *perche courante*. Elle se divise en pieds, en pouces, &c. cubiques. Les premiers sont cubes, dont un côté est égal à un pied; & les seconds sont aussi cubes, quand leur côté est égal à un pouce.

Quand vous voudrez donc déterminer la solidité d'un cube,

1°. Mesurez un côté du cube, & le multipliez par lui-même, le produit donne la base (§. 114, 184).

2°. Multipliez ce produit par les côtés, & le second produit donnera la solidité du cube.

3°. Si vous multipliez la base par six, vous aurez la surface de tout le cube (§. 184).

Exemple.

Côté	34′	Base	1156′
	34		34
	136		4624
	102		3468
Base	1156	Solid. du cube	39304′
	6		
Superf. du cube	6936′		

Démonstration.

Pl. VII. Fig. 127.

Si l'on forme, par imagination, un cube dont un côté est divisé en parties égales, il est évident qu'il en naîtra autant de lits de moindres cubes, posés les uns sur les autres, que la hauteur aura de parties Il n'est pas moins constant que chaque lit contiendra autant de petits cubes que la base contiendra de quarrés. D'où l'on doit conclure, qu'en multipliant la base par la hauteur, le produit donnera le nombre des moindres cubes contenus dans le plus grand. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

192. Si donc le côté d'un cube est de dix, sa solidité sera de mille. Si un côté contient dix pieds cubes, il s'en trouvera par conséquent mille dans le grand cube. Ainsi la perche cubique contient donc 1000 pieds cubiques, le pied cubique 1000 pouces cubiques, le pouce cubique 1000 lignes cubiques.

Remarque.

Ne perdez pas de vue ce que nous avons dit dans la remarque qui suit immédiatement la démonstration de la solution du problême 55 (§. 167).

Théorême XXVII.

193. Les parallélipipedes, les prismes, les cylindres, dont les bases & les hauteurs sont égales, sont aussi égaux.

Démonstration.

Si on coupe par imagination un parallélipipede, un prisme, un cylindre en forme de *disques* de si petite épaisseur qu'on puisse les imaginer, ces disques seront non seulement égaux entre eux (§. 181, 183); mais il arrivera même que si deux corps ont la même hauteur, on pourra tirer autant de disques de l'un que de l'autre: ces corps occuperont donc un espace égal; ce qui est évident par la seule supposition de l'égalité de leur hauteur & de leur base. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême LXIV.

194. Mesurer la solidité & la superficie d'un parallélipipede.

Solution.

1°. Multipliez la longueur AB par la largeur BC, pour trouver la base ABCD (§. 117, 183). Pl. VII. Fig 128.

2°. Si vous multipliez cette base par la hauteur BF, vous aurez la solidité.

Soit, par exemple, AB 36′ BC 15′ BF 12′

longueur AB	36	base	540
largeur BC	15	hauteur	12
	180		1080
	36		54
Base ABCD	540	solidité	6480

Pour la superficie.

1°. Multipliez AB par BC, & AB par BF, & BF par BC, pour avoir les quadrilateres BD, EB, BG (§. 117, 183).

2°. Ajoutez ces trois quadrilateres, & multipliez la somme par 2; le produit sera la superficie du parallélipipede (§. 117, 183).

EXEMPLE.

AB	36′	AB	36′	BC	15′
BC	15	BF	12	BF	12
	180		72		30
	36		36		15
□DB	540	□BG	432	□BE	180′
□BG	432				
□BE	180				
	1152′				
	2				
	2304′ Superficie du parallélipipede.				

Démonstration.

Elle est la même que la précédente (§. 191).

Théorême XXVIII.

195. Le plan diagonal DBFH divisera le parallélipipede en deux prismes égaux. Pl. VII. Fig. 128.

Démonstration.

La diagonale DB divise le parallélogramme ABCD en deux triangles égaux (§. 102). Or comme les prismes ADBFGH & DBCEFH ont les bases égales, & la même hauteur DH, ils seront donc aussi égaux (§. 193). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême LXV.

196. Mesurer la solidité & la superficie d'un prisme. Fig. 129.

Solution.

1°. Cherchez la base du prisme (§. 117, 121, 122, 123, 124.)

2°. Multipliez cette base par la hauteur, le produit sera la solidité que vous cherchez.

3°. Multipliez la circonférence entiere de la base par la même hauteur, le produit exprimera la superficie, après qu'on en aura retranché les bases.

4°. Si on les y ajoute, on aura la superficie entiere (§. 180).

EXEMPLE.

Soit AB 8′, CD 6′, AE 15′

AB	8′	ABC	24′
$\frac{1}{2}$CD	3	AE	15
ABC	24′		120
			24
Solidité du Prisme			360′

BC	91″
AB	80
AC	62
Circonférence	233″
AE	15.0
	11650
	233
Superficie sans bases	34950″
ABC —	2400
HEI	2400
Superficie entiere	39750″

Démonstration.

Le prisme triangulaire est la moitié du parallélipipede qui a la même hauteur avec une double base (§. 195). Si on multiplie donc la base du parallélipipede par sa hauteur, le produit sera sa solidité (§. 194). Si l'on multiplie aussi la base du prisme, qui est la moitié du parallélipipede, par la hauteur, on aura la moitié du parallélipipede, c'est-à-dire la solidité du prisme. Comme tous les autres prismes peuvent se réduire en triangles, il

faut leur appliquer les démonſtrations que nous avons données en parlant des triangles.

Problême LXVI.

197. Trouver la ſolidité & la ſuperficie d'un cylindre par ſon diametre & ſa hauteur donnés.

Solution.

1°. Cherchez la baſe du cylindre (§. 134.)

2°. Multipliez-la par ſa hauteur, le produit ſera la ſolidité demandée.

3°. Si vous multipliez ſa circonférence par la hauteur, vous aurez la ſuperficie en retranchant les baſes; & ſi vous les y ajoutez, vous aurez la ſuperficie entiere.

EXEMPLE.

Soit le diametre 2 AB 560′, hauteur BC 892″

Baſe	246176″	Circonf.	17584
Hauteur BC	892	BC	892
	492352		351680
	2215584		158256
	1969408		140672
Solid.	219588992″	Superf.	156849280
du cylindre.		Baſes ôtées	24617600
		Baſes	24617600
		Superficie entiere	206084480

Pl. VII. Fig. 116.

Démonſtration.

Le cercle étant un polygone régulier compoſé d'une infinité de côtés, on peut conſidérer le cylindre comme un priſme qui auroit auſſi une infinité de côtés. On trouve donc ſa ſolidité en mul-

tipliant sa base par sa hauteur, & la circonférence de la base multipliée par la même hauteur donnera la superficie (§. 196). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême XXIX.

198. Les pyramides & les cônes qui ont même base & même hauteur, sont égaux.

Démonstration.

Si l'on conçoit deux pyramides ou cônes coupés par une infinité de plans paralleles aux bases, & également éloignés du sommet, il n'y aura pas plus de plans dans une pyramide que dans l'autre à cause des hauteurs égales; donc la somme des plans de l'une sera égale à la somme des plans de l'autre, & par conséquent les pyramides seront égales. On doit faire le même raisonnement pour les cônes, puisque les côtés droits ou inclinés sont des pyramides dont les bases ont une infinité de côtés.

Théorême XXX.

Pl. VII. Fig. 122.

199. Toute pyramide est la troisieme partie d'un prisme qui auroit même base & même hauteur.

Démonstration.

Je coupe les trois parallélogrammes montants par les diagonales AF, FC, EC, & je fais passer un plan par les deux AF, FC, & un autre par les deux FC, EC, ce qui me donne trois pyramides ABCF, EFDC, ECAF: or les deux premieres ont les bases ABC, DEF égales, de même que leurs hauteurs BF, DC; & si l'on con-

çoit que la ſeconde EFDC ait pour baſe le triangle ECD, & que la baſe de la troiſieme EACF ſoit le triangle ACE, on trouvera que ces deux pyramides ſont auſſi égales, à cauſe que leurs baſes AEC, ECD ſont égales, & qu'elles ont leurs ſommets au même point F, ce qui leur donne une même hauteur; donc les trois pyramides ſont égales, & par conſéquent une pyramide eſt la troiſieme partie d'un priſme triangulaire.

Corollaire.

200. Puiſqu'on peut donc conſidérer un cône comme une pyramide ayant une infinité d'angles, le cône ſera la troiſieme partie d'un cylindre qui auroit la même baſe & la même hauteur.

Problême LXVII.

201. Meſurer la ſolidité d'une pyramide & d'un cône.

Solution.

1°. Cherchez la ſolidité d'un priſme ou d'un cylindre qui auroit même baſe & même hauteur que la pyramide & le cône. (§. 196, 197.)

2°. Diviſez-la par 3 : le quotient ſera la ſolidité de la pyramide ou du cône.

Ou bien,

Multipliez la baſe de part & d'autre par la troiſieme partie de la hauteur.

EXEMPLE.

Soit la ſolidité du priſme (§. 196) 360′, la ſolidité de la pyramide ſera 120′.

Soit la ſolidité du cylindre (§. 197) 219°, 588′, 992″; la ſolidité du cône ſera 731°, 963′, 30 $\frac{2}{3}$.

Problême LXVIII.

202. Trouver la ſolidité d'un cône tronqué ABCD.

Pl. VIII. Fig. 130.

Solution.

1°. Dites d'abord : le grand demi-diametre AG eſt à la hauteur du cône entier, comme la différence des demi-diametres AG & CF eſt à la hauteur du cône tronqué CH (§. 149); vous trouverez la hauteur du cône entier EG, par la regle de trois. (§. 85, Arithm.)

2°. Cherchez enſuite la ſolidité du cône entier AEB par la connoiſſance de ſa hauteur & de ſon diametre AB. (§. 201.)

3°. Souſtrayez la hauteur du cône tronqué FG de la hauteur du cône entier EG, pour laiſſer la hauteur de celui qu'on a ôté EF.

4°. A l'aide de cette derniere hauteur & du diametre CD, cherchez la ſolidité du cône ECD. (§. 201.)

5°. Retranchez enfin le petit cône ECD du grand AEB, ce qui reſtera ſera la ſolidité du cône tronqué ACDB.

EXEMPLE.

Soit AB 36′, CD 20′, FG = CH 12′;
AG 18′, CF 10′ & AH 8′; donc
AH : CH = AG : GE
8 : 12 = 18 :
4) 2 : 3 = 18 (§. 96, Arithm.)
2) 1 : 3 = 9
3
27 = GE
12 = GF
15 = FE

100 : 314 = 18 :
18

2512
314

56′ 5″ 2‴ moitié de la grande circonférence
1800 AG

4521 600
5652

101736″ grande baſe
$90\frac{1}{3}$ GE

9° 156′ 240″ cône AEB
100 : 314 = 10
10

314″ moitié de la petite circonférence
100 CF

31400″ petite baſe
$50\frac{1}{3}$ EF

1570000″ Solidité du cône CED
9156240 Solidité du cône AEB

7586240 Solidité du cône tronqué ACDB.

Théorême XXXI.

203. Une ſphere eſt égale aux deux tiers d'un cylindre de même hauteur, & qui auroit même baſe, c'eſt-à-dire, dont la baſe ſeroit le plus grand cercle de la ſphere.

Démonſtration.

Soit le quart du cercle ABC, qui en tournant autour de ſon rayon fixe BC décrit une demi-ſphere ABL; je décris le quarré ACBM du

Pl. VII. Fig. 131.

rayon B M ; & je coupe ce quarré par la diagonale M C qui forme le triangle rectangle isoscele M B C : je conçois que le rayon B C soit coupé en une infinité de parties égales entre elles, & que des points de division O, T, &c. soient menées des perpendiculaires O Q, T X sur ce rayon, & qui se terminent sur A M ; ces droites seront les éléments du quarré A M B C ; leurs parties O R, T Z, &c. qui se terminent sur la circonférence du quart de cercle, seront les éléments de ce quart de cercle ; & les parties O S, T V, &c. qui se terminent sur la diagonale M C, seront les éléments du triangle rectangle isoscele MBC ; de façon que chaque élément O S, &c. de ce triangle sera égal à sa distance OC, &c. du centre C ; car les triangles semblables M B C, S O C, donnent M B. B C : : S O. O C ; or M B = B C ; donc S O = O C ; & il est aisé de voir que chaque élément O Q, T X, &c. du quarré A C M B, sera égal au rayon B C : si l'on conçoit que le quarré A C B M, le quart de cercle A B C, & le triangle M B C tournent autour du rayon immobile B C ; les éléments du quarre A C B M décriront les cercles tous égaux qui formeront un cylindre A M H L ; les éléments du quart de cercle décriront des cercles qui formeront une demi-sphere A B L, & dont le plus grand sera celui qui décrira le rayon A C, lequel pour cette *raison* se nomme le grand cercle de la sphere, & les éléments du triangle M B C décriront des cercles qui formeront un cône M C H. Or ces cercles étant enrre eux comme les quarrés, au lieu des cercles, & à cause de la propriété du cercle, nous aurons $\overline{OR}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{OC}^2$; mais $BC = OQ$ & $OC = OS$; donc $\overline{OR}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OS}^2$; par la même raison nous

nous aurons $\overline{TZ}^2 = \overline{TX}^2 - \overline{TV}^2$, & ainsi des autres ; c'est-à-dire que les quarrés des éléments du quart de cercle sont égaux aux quarrés des éléments du quarré A C B M, moins les quarrés des éléments du triangle M B C ; donc, en remettant les cercles au lieu des quarrés, nous aurons les cercles décrits par les éléments du quart de cercle, ou la demi-sphere A B L, égaux aux cercles décrits par les éléments du quarré ACBM, ou au cylindre AMHL moins les cercles décrits par les éléments du triangle MBC, ou moins le cône M C H : mais le cône M C H étant une pyramide d'une infinité de côtés, est le tiers du cylindre A M H L qui est un prisme d'une infinité de côtés de même hauteur & de même base que le cône ; donc la demi-sphere ABL est égale aux deux tiers du cylindre AMHL.

On prouve de la même façon que la demi-sphere A K L est égale aux deux tiers du cylindre APEL, & que par conséquent la sphere entiere est égale aux deux tiers du cylindre M P E H. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême XXXII.

204. Le cube du diametre est à la sphere, à-peu-près comme 300 à 157.

Démonstration.

Si le diametre de la sphere est 100, son cube sera 1000000 (§. 191) ; & un cylindre ayant même base & même hauteur que la sphere, 785000 (§. 197) ; par conséquent la solidité de la sphere $523333\frac{1}{3}$ (§. 203) : le cube du diametre est donc à la sphere comme 1000000 à $523333\frac{1}{3}$,

c'eſt-à-dire, en multipliant l'un & l'autre par 3, comme 3000000 à 1570000 (§. 58 Arithm.), ou en diviſant par 10000, comme 300 à 157 (§. 59 Arithm.)

Remarque.

205. Je dis que le cube du diametre eſt à la ſphere à-peu-près comme 300 à 157. Car dans la démonſtration on prend un rapport par approximation du diametre à la circonférence 100 : 314 (§. 129).

Théorême XXXIII.

206. La ſuperficie d'une ſphere eſt le quadruple du grand cercle de la même ſphere.

Démonſtration.

La ſphere eſt égale à une pyramide qui a pour baſe la ſuperficie, & pour hauteur le rayon d'une ſphere. On trouvera la ſuperficie en diviſant ſa ſolidité par la ſixieme partie du diametre. Le produit des $\frac{2}{3}$ du grand cercle multipliés par le diametre donne la ſolidité de la ſphere; ſi l'on diviſe donc ce produit par la ſixieme partie du diametre, ou, ce qui eſt la même choſe, qu'on le diviſe d'abord par le diametre pour avoir le quotient $\frac{2}{3}$ du plus grand cercle, & enſuite par un $\frac{1}{6}$, on aura le quotient $\frac{12}{3}$ du plus grand *cercle*, c'eſt-à-dire le quadruple du plus grand cercle. Or, la ſuperficie de la ſphere eſt la même choſe; donc la ſuperficie d'une ſphere eſt le quadruple du grand cercle de la ſphere.

Corollaire.

207. On aura donc la ſuperficie d'une ſphere,

ſi on multiplie la circonférence par le diametre (§. 134).

Problême LXIX.

208. Trouver la ſuperficie & la ſolidité d'une ſphere par le diametre connu.

Solution.

1°. Cherchez la circonférence du plus grand cercle (§. 132).

2°. Multipliez-la par le diametre donné; le produit eſt la ſuperficie de la ſphere (§. 207).

3°. Si vous multipliez cette ſuperficie par la ſixieme partie du diametre, ou par le diametre entier, & que vous diviſiez le produit par 6, vous aurez la ſolidité de la ſphere.

EXEMPLE.

Soit le diametre 5600''' & la circonférence du grand cercle 17584'''.

Circonférence	17584'''
Diametre	5600
	10550400
	87920
Superficie de la ſphere	984704'''
Diametre	560
	59082240
	4923520
	551434240'''

Division	Quotient	
28 4 88143424 40 666666666	91905706'' $\frac{2}{3}$	Solidité de la ſphere.

Problême LXX.

209. Le diametre d'une ſphere étant donné, trouver ſa ſolidité par une méthode différente de celle qui eſt ci-deſſus.

Solution.

1°. Cherchez le cube du diametre (§. 191), ou tirez-le de la table des cubes.

2°. Trouvez un nombre proportionnel à 300, 157, & au cube trouvé (§.85 Arithm.), ce nombre donnera la ſolidité (§. 204).

EXEMPLE.

Soit le diametre de la ſphere 64″, & le cube 262144‴, conſéquemment

```
300 — 157 — 262144‴
                157
           --------
            1835008
           1310720
           262144
           --------
           41156608
```

```
22  221   {
41156608  {  137188‴ 208/300 Solidité de la ſphere.
33333300  {
```

Théorême XXXIV.

210. Tous priſmes, parallélipipedes, cylindres, pyramides & cônes qui ont mêmes hauteurs, ſont entre eux comme leurs baſes ; & ſi leurs baſes ſont égales, ils ſont entre eux comme leurs hauteurs.

Démonstration.

Les prismes, parallélipipedes, & cylindres sont comme les produits des bases par leurs hauteurs (§. 194, 196, 197); les pyramides & les cônes sont comme les produits de la troisieme partie de leurs hauteurs multipliée par les bases (§. 201); si leurs hauteurs sont égales, ils seront donc entre eux comme les bases sont elles; & si leurs bases sont égales, ils seront comme leurs hauteurs. (§. 58 Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

211. Les bases des cylindres sont des cercles (§. 179) : les cercles sont comme les quarrés de leurs diametres (§. 131); les cylindres qui ont même hauteur sont donc comme les quarrés de leurs diametres, ou des circonférences des bases.

Théorême XXXV.

212. Les spheres sont comme les cubes de leurs diametres.

Démonstration.

Une sphere étant au cube de son diametre comme une autre sphere est au cube de son propre diametre (§. 204), une sphere sera donc à l'égard de l'autre comme le cube du diametre de l'une est au cube du diametre de l'autre (§. 83 Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

DE LA JAUGE.

Problême LXXI.

213. Construire la verge de fer qu'on nomme

communément *jauge*, par le moyen de laquelle on puisse trouver le nombre des mesures d'un fluide contenues dans un vaisseau cylindrique.

Solution.

Pl. VIII. Fig. 132. 1°. Joignez à angle droit une ligne indéfinie au diametre A B d'un vaisseau cylindrique.

2°. Portez de A à 1 la droite égale à A B; B 1 sera le diametre d'un vase qui contient deux mesures, mais qui a la même hauteur que le premier vase.

3°. Faites A 2 = B 1, B 2 sera le diametre d'un vase qui contiendra trois mesures, mais qui aura encore la même hauteur que le vase qui n'en contient qu'une. On trouve de cette maniere les diametres de plusieurs autres vases plus grands A 3, A 4, A 5, A 6, &c.

4°. Portez sur un côté de la jauge les divisions trouvées, A 1, A 2, A 3, &c. & sur l'autre côté, autant de fois que vous le pourrez, la hauteur d'un cylindre qui ne contient qu'une mesure, & vous aurez une jauge parfaite.

Démonstration.

Deux cylindres de même hauteur, & dont cette hauteur est celle d'une mesure, sont entre eux comme les quarrés de leurs diametres (§. 211); d'où il est évident que le quarré du diametre d'un vase qui contient deux, trois, quatre, &c. mesures, est le double, triple, quadruple, &c. du quarré du diametre d'un vase qui n'en contient qu'une. Or le quarré de B 1 ou A 2, est le double, le quarré de B 2 ou A 3 est le triple, le quarré de B 3 ou A 4 est le quadruple, &c.

du quarré de A B ou A 1 (§. 144) : & comme A B ou A 1 eſt le diametre d'un vaſe qui tient une meſure, A 2 ſera le diametre d'un vaſe qui en contient deux, A 3 celui d'un vaſe qui en contient trois, A 4 celui, &c. Si vous appliquez donc au diametre d'un vaſe cylindrique le côté de la jauge où ſont marquées ces diviſions, vous verrez tout d'un coup combien ce fond peut tenir de meſures. C'eſt pourquoi ſi on multiplie le diametre par la hauteur, le produit ſera le nombre des meſures que tout le vaſe peut contenir. Ainſi par le moyen de la jauge on trouve la capacité d'un vaſe cylindrique, relativement aux meſures dont nous nous ſervons pour meſurer les fluides, comme le vin, la biere, l'eau-de-vie, &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

214. Que le diametre ſoit, par exemple, 8 & ſa hauteur 12 ; le nombre de meſures que le vaiſſeau pourra contenir, ſera 96.

Problême LXXII.

215. Trouver la capacité d'un tonneau, c'eſt-à-dire, le nombre des meſures d'un fluide qu'il contient.

Solution.

1°. Meſurez, avec le côté convenable de la jauge, la longueur du tonneau F E, & avec l'autre côté de la jauge, meſurez le diametre du fond A B, & le diametre du ventre du tonneau par ſon orifice C.

Pl. VIII. Fig. 133

2°. Comme un tonneau forme un ventre vers le milieu, & que de ſon orifice C il va toujours

en diminuant vers ses deux extrémités, l'expérience qu'on a ácquise par l'usage (quoiqu'on ne puisse le démontrer géométriquement), le fait considérer comme un cylindre dont la base est un cercle moyen, arithmétiquement proportionnel entre le cercle qui forme le fond & celui qui forme le ventre : il faut donc ajouter le grand diametre CD au petit AB.

3°. Multipliez la moitié de la somme par la longueur du tonneau, le produit (comme on le voit par la démonstration du problême précédent) (§. 213) sera le nombre des mesures que peut contenir le tonneau.

EXEMPLE.

Soit AB = 8
CD = 12

La somme sera = 20

Demi-somme = 10
FE = 15

Capacité du tonneau = 150 mesures.

Remarque.

216. Il faut remarquer qu'on est encore à trouver une méthode juste, infaillible, & *facile* pour mesurer les fluides dans un tonneau qui n'est pas plein. Mais si on le leve sur un de ses fonds, & qu'on prenne la hauteur du vin pour la longueur du tonneau, on pourra, à l'aide du problême précédent, trouver le nombre des mesures qu'il pourra contenir.

Problême LXXIII.

217. Trouver la ſolidité de quelque corps irrégulier que ce puiſſe être.

Solution.

1°. Mettez le corps irrégulier dans un parallélipipede creux, rempliſſez enſuite d'eau ou de ſable ce parallélipipede, & après avoir rendu la ſurface du ſable exactement plane, marquez la hauteur A B de cette ſurface ſi vous n'avez pas rempli le vaiſſeau entiérement.

Pl. VIII. Fig. 134.

2°. Ayant retiré le corps irrégulier du vaiſſeau, applaniſſez de nouveau la ſurface du ſable qui doit reſter dans le parallélipipede, & marquez encore la hauteur de cette ſurface A C : de cette maniere vous aurez la hauteur B C.

3°. Comme le corps irrégulier eſt égal au parallélipipede DFCGE, il faut meſurer ſa longueur FC, ſa largeur CG, & chercher ſa ſolidité (§. 194).

EXEMPLE.

Soit A B 8', A C 5', on aura BC 3'; ſoit donc encore FC 12', CG 4', la ſolidité du corps ſera 144'.

Remarque.

218. Si on ne pouvoit commodément mettre dans ce vaſe le corps irrégulier qu'on veut meſurer, comme ſeroit une ſtatue immobile ; on pourra l'entourer d'un parallélipipede ou d'un priſme quadrangulaire, & remplir le vuide avec du ſable ; puis la baſe étant connue, on opérera comme ci-deſſus.

Problême LXXIV.

219. Deffiner les *développements*, *rets*, ou *chaffis*, qui, pliés comme ils doivent être, repréfenteront les figures des différents corps géométriques.

Solution.

Pl VIII. Fig. 135. 1°. Faites le triangle équilatéral ABC (§. 53) : divifez chaque côté en deux également aux points EDF, & menez les droites DE, EF, FD, & vous aurez la figure ou développement d'un *tétraedre.*

Fig. 136. 2°. Si vous prolongez les côtés AC en G, BC en H, & ED en L, de maniere que CG foit égal à DC, CH=FC, DI=IL=ED; vous pourrez alors mener les droites GL, CI, & IH; & par ce moyen vous aurez le développement de l'*octaedre.* (§. 190.)

Fig. 137. 3°. Portez 4 fois fur la ligne AB le côté du cube AI, de façon que AI=IL=LN=NB, & formez enfuite le rectangle ABDC, en forte que AC foit égal à AI (§. 99). Menez les droites IR, LM, NO, paralleles à AC, & prolongez de part & d'autre IR & LM en E & F, G & H, tant que EI=IR=RF, & GL=LM =MH; vous ferez par cette méthode le développement de l'*exaedre.* (§. 182.)

Fig. 138. 4°. Décrivez le pentagone régulier ABCDE (§. 107), appliquez une regle fur les points D & B, & menez la droite BL. Ayant appliqué la même regle fur DA, menez la droite AG : & faites AG = AB = BL, & de l'intervalle AB faites une interfection en Q des points G, L, vous formerez ainfi le pentagone ABLQG. Si vous

construisez par la même méthode les quatre autres pentagones BNRQC, CHGFD, DKSME, ETVIA, & les autres six *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, vous aurez décrit le rets, chassis, figure ou développement du *dodécaedre*. (§. 190.)

Pl. VIII. Fig. 139

5°. Décrivez le triangle équilatéral ACB (§. 53); prolongez la droite AB en D, & portez la longueur de cette ligne AB quatre fois sur AD en commençant au point B; menez ensuite la droite CE parallele à AD (§. 67), & faites CI = IK = KL = LM = ME = AB; prolongez AC en N jusques à ce que CN = AC; appliquez la regle sur B & I, F & K, G & L, H & M, D & E, & tirez les droites YO, SP, TQ, VR, & XE; puis ayant appliqué cette même regle sur D & M, H & L, G & K, F & I, B & C, menez les droites DQ, XP, VO, TN, SC; faites enfin MR = ME, & BY = BA, & tirez les droites RE & AY: ce qui donnera la figure du chassis de l'*isocaedre*. (§. 190.)

Fig. 140.

6°. Transportez de B en H sur la ligne BD la largeur du *parallélipipede* AB, & sa longueur de H en I, puis encore sa largeur de I en K, & sa longueur de K en D; élevez avec l'équerre au point B la hauteur du parallélipipede AB, & achevez le rectangle BACD (§. 99); menez les paralleles EH, FI, GK à AB (§. 67), & prolongez E de part & d'autre en L & N, puis FI en M & O, jusquà ce que LE, MF, IO & NH soient paralleles à la hauteur du parallélipipede. C'est de cette façon qu'on forme le développement du parallélipipede. (§. 182.)

Fig. 141

7°. Portez sur la droite CF les côtés de la base du *prisme* CG, GH, & HF; décrivez le rectangle CAEF dont la hauteur CA est égale à la hau-

teur du prisme (§ 99). Construisez sur les côtés BD & GH, AB & DE, CG & HF les triangles BKD & GIH (§. 55) : & tout le développement du prisme sera fait (§. 179). Si la base étoit un pentagone, exagone, eptagone, &c. on décriroit sur BD & GH un pentagone, exagone, eptagone, &c.

Pl. VIII. Fig. 142. 8°. Du point A de la *pyramide* AE décrivez l'arc EB, & appliquez-lui les côtés de la base ED, DC, CB; menez les droites AE, AD, AC, AB. Décrivez enfin sur DC la base de la pyramide, & vous aurez le rets de la pyramide. (§. 187.)

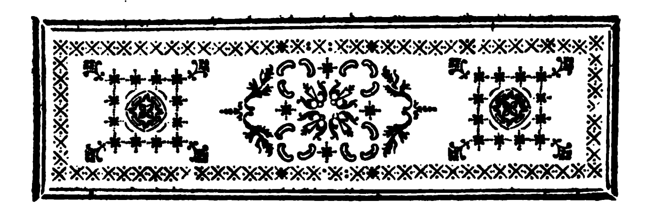
Fig. 143. 9°. Pour avoir le rets d'un *cylindre*, décrivez un rectangle (§. 99) dont la hauteur BC soit égale à celle du cylindre, & la longueur CF = à sa circonférence. (§. 132.)

Prolongez BC en A & D, jusqu'à ce que BA & CD soient égales au diametre, & décrivez les cercles qui font les bases du cylindre.

Remarque.

220. Pour coller ensemble toutes ces parties des développements, avec lesquels vous voulez former vos corps géométriques, ayez soin d'y laisser des bords ou marges en les coupant, à peu près comme vous le voyez par les lignes ponctuées de la figure 135; rien de meilleur que ce travail, & rien de plus utile pour faciliter la connoissance & faire concevoir distinctement les corps géométriques aux commençants.

Fin de la Géométrie.



ÉLÉMENTS
DE LA
TRIGONOMÉTRIE
RECTILIGNE.

DÉFINITION I.

1. LA *Trigonométrie* eſt la ſcience de trouver tous les côtés & les angles d'un triangle rectiligne par la connoiſſance de trois de ſes parties, dont au moins une eſt un des côtés du même triangle. Des deux côtés, par exemple, A B & A C, & de l'un des angles C, trouver les deux autres angles A & B, auſſi-bien que le côté B C.

Pl. I. Fig. 1.

DÉFINITION. II.

2. La moitié de la corde A D de l'arc A B ſe nomme le *Sinus* de l'arc A E, & de l'arc A I, qui ſont la moitié des arcs A E B & A I B.

Fig. 2.

Corollaire I.

3. Donc le ſinus A D de quelque arc que ce puiſſe être eſt perpendiculaire ſur le rayon du cercle E C (§. 95, Géom.) : & les ſinus de pluſieurs

Fig. 2.

arcs sont par conséquent paralleles entre eux. (§. 75, Géom.)

Corollaire II.

Fig. 2. 4. L'arc AE étant la mesure de l'angle ACE, & l'arc AI celle de l'angle ACI (§. 16, Géom.), il est évident que ces deux angles ont pour sinus AD.

Corollaire III.

Fig 2. 5. Deux angles que l'on nomme *de suite*, c'est-à-dire posés l'un auprès de l'autre sur la même droite EI, ont donc le même sinus.

DÉFINITION III.

Fig. 2. 6. On nomme *Tangente* de l'arc AE, & par conséquent de l'angle ACE, la droite EF, élevée perpendiculairement à l'extrémité du rayon EC; & on donne le nom de *Secante* du même arc EA & du même angle ECA, à la droite FC.

DÉFINITION IV.

Fig. 2. 7. Le *Sinus verse* d'un arc ou d'un angle est la partie du diametre comprise entre l'extrémité de l'arc & son sinus droit. Ainsi le sinus verse de l'arc AE, ou de son angle ACE, est la partie ED du diametre EI; & AG = DC sinus de l'arc AH, qui pris avec l'arc EA forme 90 degrés, se nomme *Sinus du complément*, ou *cosinus*. Sa tangente HL se nomme *Tangente du complément*, ou *cotangente*; la sécante enfin CL se nomme *Sécante du complément* ou *cosécante* du même arc EA, ou de l'angle ACE. Quand on dit *Sinus droit* ou simplement *Sinus*, on entend la même chose.

Remarque.

L'angle de ſuite ACI, de l'angle ACE, ſe nomme complément à deux droits de l'angle ACE; & l'angle ACH qui manque à l'angle ACE pour valoir un droit, ſe nomme complément à l'angle ACE. Il faut donc bien prendre garde de ne pas confondre ces deux ſortes de compléments. Fig. 2.

DÉFINITION V.

8. Le rayon EC ou HC ſe nomme *Sinus total.* Fig. 2.

Corollaire I.

9. Puiſque le rayon HC eſt le ſinus du quart de cercle EH, le ſinus total eſt par conſéquent le ſinus de l'angle droit. (§. 37 Géom.)

Corollaire II.

Il eſt évident que tout ſinus droit, toute tangente & toute ſécante appartiennent à deux arcs, leſquels pris enſemble ſont toujours 180 degrés, ou un demi-cercle. Cela ſe voit clairement à l'égard du ſinus AD qui appartient auſſi bien à l'arc AHI, qu'à l'arc AE. Il en eſt de même de la tangente FE, & de la ſécante FC qui appartient auſſi à l'arc AHI; car ſi on prolonge la ſécante FC, juſqu'à ce qu'elle coupe la tangente qu'on placera à l'extrémité I du diametre EI; cette tangente & cette ſécante formeront des angles dans l'arc EBI égaux à ceux qu'ils forment dans l'angle EAHI. Fig. 2.

Théorême I.

10. Les ſinus de deux arcs ſemblables BC & EF ont le même rapport, & ſont en même raiſon avec leurs rayons AB & ED. Fig. 3 & 4.

Démonstration.

Si les arcs BG & EH sont semblables, ils ont l'un & l'autre le même nombre de degrés, & par conséquent les angles A & D sont égaux (§. 35, Géom.). Or les angles C & F sont droits (§. 3), le rayon AB est donc au sinus BC comme le rayon ED au sinus EF (§. 148, Géom.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque I.

11. C'est pourquoi on attribue 10000000 parties au sinus total de quelque cercle que ce soit, & on suppute par le moyen de la Géométrie, combien de ces parties se trouvent au sinus & à la tangente de chaque degré, & même de chaque minute du quart de cercle entier. C'est de cette façon qu'on a construit les *tables des sinus & des tangentes* dont on a besoin dans la Trigonométrie, & que l'on trouve à la tête de presque tous les traités qui ont été composés sur cette matiere.

Remarque II.

12. Les sinus & les tangentes sont des nombres d'une étendue qui ennuie infiniment quand il s'agit d'en faire la multiplication ou la division dans la Trigonométrie; c'est pourquoi *Jean Neper*, Baron en Ecosse, & après lui *Henri Briggius*, Anglois, ont imaginé certains nombres, dont l'usage abrege extraordinairement les grands calculs qu'il faudroit faire, si l'on se servoit des nombres ordinaires; ils convertissent la multiplication en addition, & la division en soustraction. On leur a donné le nom de

de *Logarithmes*. On les trouve dans les tables des ſinus & des tangentes, non ſeulement pour le calcul des ſinus & des tangentes, mais encore pour celui des nombres naturels depuis un jusqu'à 1000, & quelquefois davantage. Les logarithmes étant donc d'une ſi grande commodité, il eſt à propos d'en donner quelque connoiſſance préciſe, avant que d'en venir aux Problêmes.

DÉFINITION VI.

13. Si l'on a deux ſuites de nombres, l'une en proportion géométrique, l'autre en proportion arithmétique, on nomme les derniers les logarithmes des premiers.

Remarque I.

14. Soient les deux ſuites de nombres

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les premiers ſe ſuivent en proportion géométrique, & les ſeconds en proportion arithmétique : 0 eſt le logarithme de l'unité ; 1 le logarithme de 2 ; 2 celui de 4 ; 7 celui de 128 ; 8 celui de 256, &c.

Remarque II.

15. Si le logarithme de l'unité eſt 0, le logarithme du produit ſera égal à la ſomme des produitsdesl ogarithmes.

EXEMPLE.

La ſomme des logarithmes 1 & 2 eſt 3, qui eſt

le logarithme de 8, produit de 2 multiplié par 4 : 7 qui est la somme des logarithmes 2 & 5, aussi bien que des logarithmes 4 & 3, est le logarithme de 128, produit de 4 multiplié par 32, & de 8 multiplié par 16 : c'est pourquoi le logarithme du quarré est égal au double du logarithme de la racine.

Exemple.

4, logarithme du nombre quarré 16 est double du logarithme 2, racine de 4; & 6, logarithme du nombre quarré 64, est double du logarithme 3 racine de 8. La moitié du logarithme d'un nombre est le logarithme de la racine quarrée du même nombre. Ainsi la moitié du logarithme 8 est le logarithme de la racine 16 du nombre quarré 256. Le logarithme du cube est le triple du logarithme de la racine : 9, logarithme du nombre cubique 512, est le triple du logarithme 3 racine de 8; & par conséquent le logarithme de la racine cubique est la troisieme partie du logarithme du nombre cubique. 2, par exemple, logarithme de 4, est la troisieme partie de 6 logarithme du nombre cubique 64.

Remarque III.

16. Si le logarithme de l'unité est 0, le logarithme du quotient sera égal à la différence des logarithmes du diviseur & du dividende. On trouve le logarithme d'une fraction, si après avoir soustrait le logarithme du numérateur du logarithme du dénominateur, on place devant le reste le signe — qui marque la soustraction. Ainsi 2, différence entre 5 & 7, est le logarithme du quo-

tient 4 de 128 divisé par 32. De même 5, différence de 3 & 8, est le logarithme du quotient 32 de 256 divisé par 8. Mais —1, différence entre 0 & 1, est le logarithme de la fraction $\frac{1}{2}$.

Remarque IV.

17. On voit par ce que je viens de dire, comment à l'aide des logarithmes on convertit la multiplication en addition, la division en soustraction, l'extraction de la racine quarrée en bipartition, & l'extraction de la racine cubique en tripartition.

Remarque V.

18. Les Constructeurs des tables ont pris, 0.00 000 000, 1 00 000 000, 2.00 000 000, 3.00 000 000, 4.00 000 000, pour logarithmes des nombres 1. 10. 100. 1000 10000, & avec une peine & un travail des plus laborieux ont poussé les logarithmes, non seulement depuis 1 jusqu'à 10000, mais jusqu'à 100000. C'est par là qu'ils ont déterminé les logarithmes des sinus & des tangentes. On trouve ces tables des logarithmes dans M. Ozanam, &c. Les problêmes suivants indiqueront la maniere de se servir des logarithmes.

Remarque. VI.

Pour donner une plus grande connoissance des logarithmes, il faudroit en parler fort au long; mais comme un abrégé demande qu'on ne dise précisément que ce qui est absolument nécessaire pour l'intelligence de la matiere que l'on traite, je me bornerai à la remarque suivante, parceque

ceux qui voudront se mettre parfaitement au fait, pourront consulter M. Ozanam, les Eléments de Wolf, ceux de l'Abbé Deidier, &c. qui en ont traité d'une maniere fort claire.

Remarque VII.

Une suite de puissance littérale est la même que la progression géométrique; car $a^0 = 1$, $a^1 = 2$, &c. & les puissances négatives a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, &c. sont les mêmes que celles-ci $a^{\frac{1}{1}}$, $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, & les exposants des puissances littérales seront les mêmes que les termes de la progression arithmétique que nous avons mis sous ceux de la progression géométrique : les logarithmes ont donc les mêmes propriétés que les exposants des puissances de a; ainsi si je veux multiplier le terme 2 de la progression géométrique par le terme 8, je n'ai qu'à ajouter ensemble les logarithmes 1 & 3 de ces deux termes, & la somme 4 sera le logarithme du produit cherché. Or le terme de la progression géométrique écrit au-dessus de 4 est 16; donc 16 est le produit de 2 par 8. Si je veux diviser 16 par 2, je prends les logarithmes 4 & 1 de ces termes 16 & 2, & retranchant le second du premier, le reste 3 est le logarithme du quotient cherché; ainsi 8 écrit sur 3 est le quotient de 16 divisé par 2.

Pour élever le terme 2 de la progression géométrique à sa quatrieme puissance, je multiplie le logarithme 1 du terme 2 par l'exposant 4 de la quatrieme puissance de 2 : ainsi le terme 16 écrit au dessus de 4 est la quatrieme puissance cherchée.

Pour extraire la racine cubique de 8, je prends

ſon logarithme 3, & le diviſant par l'expoſant 3 de la racine cubique, le quotient 1 eſt le logarithme de la racine cubique de 8, & par conſéquent le terme écrit au-deſſus de 1 eſt la racine cherchée. Ainſi ce qu'il faudroit faire par la multiplication & la diviſion, en opérant ſur les termes de la progreſſion géométrique, on le fait par l'addition & la ſouſtraction; & ce qu'il faudroit faire par l'élévation des puiſſances ou l'extraction des racines, on le fait par la multiplication & la diviſion.

Comme il ſe trouve entre les termes d'une progreſſion géométrique beaucoup de nombres qui ne ſont point en progreſſion, & qui par conſéquent n'ont point de logarithmes, on y a pourvu par les logarithmes des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. en cette ſorte. On a pris la progreſſion géométrique décimale, 10, 100, 1000, 10000, &c. Mais comme il a fallu extraire des racines pour trouver les logarithmes des nombres 1 & 10, pour éviter les reſtes, on a augmenté tous les termes de leur progreſſion, & leurs logarithmes de pluſieurs zéros, en mettant un point devant pour diſtinguer les logarithmes d'avec les zéros ajoutés, comme 1. 0000000, ou 10. 0000000, &c. & leurs logarithmes 0. 0000000, 1. 0000000, &c. On a nommé *Caractériſtique* le caractere qui ſe trouve devant ce point.

Théorême II.

19. Dans tout triangle ABC les côtés ſont comme les ſinus des angles oppoſés. Fig. 5.

Démonſtration.

Si on conçoit un triangle inſcrit dans un cercle (ce qui ſe peut toujours faire) (§. 97 Géom.), la moitié de l'arc AB ſera la meſure de l'angle C

(§. 84 Géométrie), & ainsi la moitié du côté AB sera son sinus (§. 2). Semblablement la moitié de l'arc AC est la mesure de l'angle B, & par conséquent la moitié du côté AC sera le sinus de l'angle B; donc le côté AC est au sinus de l'angle opposé B, comme le côté AB est au sinus de l'angle C qui lui est opposé. (§. 59 Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême I.

Fig. 5. 20. Les deux angles A & C, & le côté AB étant connus, trouver le côté BC.

Solution.

Dites (§. 19): le sinus de l'angle A est au côté qui lui est opposé BC, comme le sinus de l'angle C au côté AB qui lui est opposé.

Soit, pour exemple, C = 48° 35', A = 57° 28', AB = 74': on opere ainsi par les logarithmes.

Log. Sin. C . . 9. 8750142
Log. AB 1. 8692317
Log. Sin. A . . . 9. 9258681

Somme de AB & A 11. 7950998

Log. BC . . . . 1. 9290856 auquel répond directement dans les tables 83'.

Remarque I.

21. Si, non content d'avoir le nombre des pieds, vous voulez encore des pouces, cherchez le même logarithme de BC sous le caractéristique 2 après 830; vous trouverez que le logarithme 832 est celui qui en approche le plus; & ainsi vous verrez qu'outre 83 pieds, il y a encore deux pou-

ces. Voulez-vous avoir même des lignes? cherchez encore le même logarithme sous le caractéristique 3 après 8320, & vous trouverez que le logarithme qui en approche de plus près est 8320, & par consequent que le côté BC sera de 8° 3′ 2″ 1‴. Il faut toujours suivre cette méthode, quand le logarithme ne se trouve pas assez exactement sous le caractéristique.

Remarque II.

22. Comme on résout le problême par la regle de Trois (§. 85 Arith.), il faudroit multiplier le sinus A par le côté AB, & diviser le produit par le sinus de l'angle C: il est évident qu'il faut ajouter le logarithme du côté AB au logarithme du sinus A; & qu'il faut ensuite soustraire de la somme le logarithme du sinus C (§. 15 & 16).

Problême II.

23. Les deux côtés AB & BC avec l'angle C opposé à un des deux AB, étant connus, trouver les autres angles. Fig. 5.

Solution.

Dites (§. 19): le côté BC est au sinus de l'angle cherché A qui lui est opposé, comme le côté AB est au sinus de l'angle donné C qui lui est opposé.

EXEMPLE.

Soit AB = 82′, BC = 75′, C = 64° 33′: vous ferez le calcul de la façon suivante.

Logar. AB 1. 9138138
Logar. du Sin. C. . . 9. 9556688
Logar. de BC. . . . 1. 8750613

Somme de BC & de C 11. 8307301

Logar. du Sin. A. . . 9. 9169163, auquel répond de plus près 55°. 40′.

Remarque I.

24. Si vous n'avez pas assez de 55° 40′, vous pourrez faire une seconde opération comme il s'ensuit.

Soustrayez du logarithme trouvé 9. 9169. 163. le moindre qui en approche le plus près 9. 9168. 593

Et marquez la premiere différence 570

Soustrayez aussi du plus prochain & plus grand que le logarithme trouvé 9. 9169. 455
le moindre. 9. 9168. 593

Et marquez la différence. 862

Dites : 862 donnent 60″, combien donneront 570
60

34200

Remarque II.

25. Les deux angles A & C étant connus, on trouve le troisieme par le moyen de la géométrie (§. 77, Géom.), comme on le voit par l'exemple suivant.

C =	64°	33′	0″
A =	55	40	39
A+C	120	13	39
A+C+B	179	59	60
B	59	46	21

Problême III.

26. Connoissant dans un triangle rectangle les côtés AB & BC qui forment l'angle droit B, trouver les autres angles. Fig. 6.

Solution.

Ayant pris BC pour le sinus total, AB sera la tangente de l'angle C (§. 6). Dites donc : le sinus total est à la tangente de l'angle C, comme un des côtés BC est à l'autre AC.

E x e m p l e.

Soit BC de 79′; AB de 54′; le calcul sera tel:
Logar. de BC. . . . 1. 8976. 271
Logar. de AB. . . . 1. 7323. 938
Logar. du sinus total. 10. 0000. 000

Logar. de la tang. C. 9. 8347. 667, qui dans les tables appartient à 34° 21′. L'angle C est donc de 34° 21′; & l'angle A 55° 39′. (§. 75, Géom.)

L E M M E.

27. Si l'on ajoute la moitié de l différence de

deux nombres ou quantités à la moitié de leur somme, on aura le plus grand nombre des deux; si au contraire on retranche cette demi-différence de la moitié de la somme, le nombre qui reste est précisément le plus petit des deux.

Démonstration.

Le plus grand de deux nombres est composé du plus petit & de leur différence; la somme des deux est donc composée du plus petit pris deux fois, & de leur différence. C'est pourquoi la demi-somme étant composée du plus petit nombre & de la moitié de la différence; si on ajoute la demi-différence à la moitié de la somme, on aura le plus grand des deux nombres; & au contraire si on ôte cette demi-différence, le reste exprimera le plus petit des deux nombres proposés. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême IV.

Fig. 7.

28. Connoissant les deux côtés AC & CB d'un triangle, avec l'angle C qui les forme, trouver les autres angles.

Solution.

1°. Dites: la tangente de la demi-somme des angles cherchés A & B est à la tangente de la moitié de leur différence, comme la somme des côtés AC & CB est à leur différence entiere.

2°. Ajoutez la demi-différence à la moitié de leur somme, la nouvelle somme qui en viendra sera l'angle B opposé au plus grand AC des deux côtés connus. Retranchez cette demi-différence de la moitié de la somme des deux angles, le reste donnera l'angle A. (§. 27.)

Soit pour exemple A C 75′, B C 58′, C 108° 24′; faites ainsi le calcul.

AC	75°	AC	75′	A+B+C	179° 60′
BC	58	BC	58	C	108 24
AC+BC	133′	AC-BC	17′	A+B	71° 36′
				$\frac{1}{2}$(+AB)	35° 48′

Logar. de AC+BC. 2. 1238516
Logar. de AC—BC. 1. 2304489
Logar. de la tangente $\frac{1}{2}$ (A+B) 9. 8580694

Somme 11. 0885183

Logar. de la tang. $\frac{1}{2}$ (A—B) 8. 9646667, auquel répondent dans les tables 5° 17′.

$\frac{1}{2}$ (A+B)	35° 48.	$\frac{1}{2}$ (A+B)	35° 48′
$\frac{1}{2}$ (A—B)	5 17	$\frac{1}{2}$ (A—B)	5 17
B	41° 5′	A	30° 31′

Démonstration.

Prolongez le côté AC en D jusqu'à ce que CD = BC, & que CE = B C; DA sera la somme, E A la différence des côtés C B & C A, & l'angle D B E sera droit (§. 86, Géom.)

Menez A G parallele à E B, l'angle G sera aussi droit, & G A D = B E D (§. 37, 72, Géom.); & G B tangente de l'angle G A B, & G D tangente de l'angle G A D (§. 6). Or, D C B = C B A + C A B = C B E + C E B = 2 C E B (§. 74, 79, Géom.); C B E & C A G seront donc la moitié de la somme des angles cherchés C B A & C A B; par conséquent B A G sera la moitié de la différence (§. 27). Donc D G, tangente de la demi-somme des angles cherchés, est à B G, tangente de la demi-différence, comme D A, somme des

côtés AC & CB, eſt à EA, qui eſt leur différence (§. 149, Géom.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême V.

29. Connoiſſant les trois côtés d'un triangle, trouver les angles.

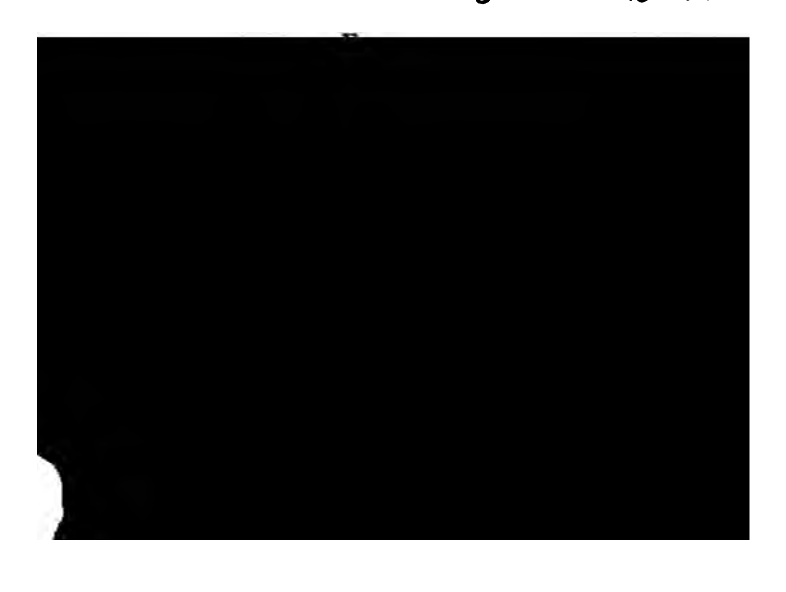
Solution.

Fig. 8. 1°. Du ſommet de l'angle A décrivez un cercle par le plus petit côté AB; & parceque AD = AB, vous aurez auſſi AF = AB = AD (§. 27, Géom.): CD ſera la ſomme des côtés AC & AB, & CF leur différence.

2°. Dites : la différence FC des côtés AB & AC eſt au ſegment de la baſe GC, comme la baſe BC du triangle eſt à la ſomme de ſes côtés AB + AC.

3°. Souſtrayez CG de la baſe BC pour avoir le reſte BG.

4°. Abaiſſez de A la perpendiculaire AE ſur la corde BG; vous aurez BE = EG = ½ BG (§. 95, Géom.) : ayant donc les côtés AB & BE du triangle rectangle AEB, on peut trouver les angles A & B; & dans l'autre ACE, ayant les côtés AC & CE, on trouve auſſi les angles C & A. (§. 23.)



Log. de B C 1. 6020600
Log. de A B + A C. . 1. 9084850
Log. de F C. 0. 9542425

Somme . . . 2. 8627275

Log. de G C . . . . 1. 2606675, auquel répondent dans les tables 18'. Si vous le voulez plus exact (§. 21) & que vous augmentiez vos recherches, vous trouverez enfin G C de 1822'''.

B C = 4000'''	E G = 1089'''
G C = 1822	G C = 1822
B G = 2178'''	E C = 2911'''
B E = 1089'''	

Log. de A B 3. 5563025
Log. du sin. total . 10. 0000000 }
Log. de E B. . . . . . . 3. 0370279 }

Log. du sin. A . . . . . 9. 4807254, auquel répond dans les tables le logarithme 17° 36', & par conséquent l'angle B de 72° 24'.

Log. de A C. 3. 6532125
Log. du sin. total . . 10. 0000000
Log. de E C 3. 4640422

Log. du sinus A. . . . 9. 8108297, auquel répond dans les tables le logarithme 40° 19'; & l'angle C sera donc de 49° 41'. Par conséquent dans le triangle A B C l'angle A est de 57° 55', B de 72° 24', & l'angle C de 49° 41'.

Démonstration.

J'ai à démontrer que CB est à CD, comme CF est à CG : on va le voir clairement.

Puisque la mesure de l'angle y ou G B D est la

moitié de l'arc G i D, & la mesure de l'angle x la moitié de l'angle GBD (§. 84, Géom.); on on aura $x + y = 180°$. Mais $x + o$ est aussi $= 180°$ (§ 38, Géom.). Donc $o = y$ (§. 25, Arithm.). Et comme l'angle C est commun aux deux angles CGF & CBD, on aura CB : CD = CF : CG (§. 148, Géom.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque I.

30. Comme on a donné BE & EC en lignes, il a fallu aussi prendre dans le calcul 3600‴ pour AB au lieu de 36, & 4500‴ pour AC au lieu de 45.

Remarque II.

31. Nous donnerons encore quelques éclaircissements sur l'usage de la Trigonométrie pour la résolution de divers problêmes de la Géométrie. C'est pourquoi nous ajoutons l'Appendice suivant.

APENDICE.

Problême I.

32. TROUVER la hauteur, par exemple, d'une tour accessible du côté qu'on aura choisi pour station.

Solution.

Fig 9. 1°. Mesurez l'angle ADC (§. 43, Géom.) & la droite BE ou DC. (§. 44, Géom.)

2°. On connoîtra la valeur de l'angle A, parceque l'angle C est droit. (§. 75, Géom.)

3°. Ayant connu cet angle A, on trouvera la ligne A C (§. 20.)

4°. Ajoutez à cette ligne la hauteur DE = BC; & comme les droites C D & B E sont paralleles, & CB & ED perpendiculaires à BE, on aura la hauteur A B. Mais si B E n'étoit pas horizontal, il faudroit mesurer BC en particulier (§. 171, Géom.)

Problême II.

33. Mesurer la hauteur inaccessible A B. Fig. 10.

Solution.

1°. Choisissez les deux stations E & G, d'autant plus éloignées l'une de l'autre, que la montagne, tour, ou arbre qu'on veut mesurer ont plus d'élévation : de là mesurez les angles A D C & A F C (§. 43, Géom.), ensuite la longueur des distances G E ou D F (§. 44, Géom.)

2°. Retranchez de l'angle A F C l'angle ADF; le reste sera l'angle F A D (§. 74, Géom.)

3°. Cherchez le côté A F, par le moyen de la connoissance acquise des parties du triangle AFD, des angles, & du côté F D.

4°. Cherchez ensuite le côté A C par l'angle F, & le côté A F connus du triangle rectangle. (§. 20.)

5°. Ajoutez enfin la hauteur de l'instrument DE à la hauteur A C, ou si B C n'étoit pas égal à la hauteur de l'instrument, trouvez F C, puis BC, dans le triangle rectangle FBC (§. 20) : vous aurez alors la hauteur demandée A B.

Problême III.

34. Des deux fenêtres E & F placées à deux

Fig. 11. différents étages d'une maison, mesurer une hauteur dont on peut voir le sommet A des deux fenêtres ci-dessus.

Solution.

1°. Prenez par le moyen d'un plomb suspendu à une corde les degrés d'élévation de la fenêtre la plus haute E, au-dessus de la plus basse F, puis la hauteur de la même fenêtre F au-dessus de la terre G, ensuite des fenêtres mesurez la quantité des angles AEC & AFD (§. 43, Géom.)

2°. Ajoutez l'angle AEC à 90°, & vous aurez l'angle AEF; soustrayez de 90 degrés l'angle AFD, le reste sera la valeur de l'angle AFE.

3°. Ajoutez l'angle AEF à l'angle AFE, & retranchez la somme de 180°, ce qui restera donnera l'angle EAF. (§. 77, Géom.)

4°. Cherchez dans le triangle AEF le côté AF.

5°. Cherchez ensuite dans le triangle AFD le côté AD. (§. 20.)

6°. Ajoutez enfin à celui-ci l'élévation de la fenêtre au-dessus de la terre; ou si GB n'étoit pas horizontal, c'est-à-dire, une ligne droite parallele à l'horizon, mesurez la ligne DF, puis par le moyen de l'angle trouvé DFB (§. 43, Géom.) mesurez à part DB (§. 20); de cette façon vous aurez la hauteur AB.

Problême IV.

Fig. 12. 35. Mesurer la distance de deux lieux A & B, tous deux accessibles d'un troisieme C.

Solution.

1°. Mesurez l'angle C (§. 43 Géom.) puis les lignes AC & CB (§. 44, Géom.)

2°.

2°. Toutes ces choses étant connues, vous trouverez la valeur de l'angle A (§. 28), & par le (§. 20) vous pourrez trouver la distance demandée AB.

Problême V.

36. Trouver la distance de deux lieux AB dont un seul B est accessible par un troisiéme C. Fig. 13.

Solution.

Prenez la mesure des angles C & B (§. 43 Géom.), ensuite la mesure de la ligne BC (§. 44 Géom.), & par ce moyen vous trouverez la distance AB qui vous donnera la largeur de la riviere qui est entre deux (§. 20).

Problême VI.

37. Trouver la distance des deux lieux inaccessibles A, B. Fig. 14.

Solution.

1°. Ayant choisi à volonté trois stations D, C, E sur la même ligne droite, mesurez les angles ADC, ACD, BCE, & BEC (§. 43 Géom.), puis les lignes DC & CE. (§. 44 Géom.)

2. Retranchez de 180° la somme des angles ADC & ACD, & encore de ACD & BCE, aussi bien que de BCE & BEC: dans le premier cas le reste est la valeur de l'angle DAC; dans le second celle de l'angle ACB, & dans le troisieme la valeur de l'angle CBE. (§. 77, 8, Géom.)

3°. Trouvez à l'aide de ces connoissances les côtés AC & BC (§ 20), & par le (§. 28) l'angle CAB, & enfin le côté AB (§. 20).

Problême VII.

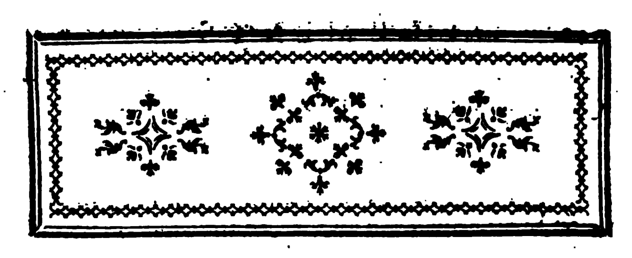
38. **Trouver le rapport du diametre d'un cercle à sa circonférence.**

Solution.

Si le rayon du cercle CD est 10000000, le sinus AG aussi bien que la tangente ED sera un arc d'une minute DA 2909 à-peu-près : ainsi l'arc AD un peu plus grand que AG, & un peu moindre que ED, doit être aussi à-peu-près de 2909. Multipliez 2909 par 21600, c'est-à-dire, par le nombre entier des minutes contenues dans la circonférence entiere, le produit sera 62834400. Le diametre du cercle est donc à sa circonférence comme 20000000 est à 62834400, ou peu s'en faut ; c'est-à dire (en divisant l'un & l'autre par 200000) comme 100 est à 314 (§. 59 Arithm.)

Fig. 15.

Fin de la Trigonométrie.



ÉLÉMENTS DE MÉCHANIQUE.

DÉFINITION. I.

1. LA *Méchanique* eſt la ſcience de mouvoir les corps avec de moindres forces & en moins de temps ; c'eſt-à-dire qu'une puiſſance dirigée par les regles de cette ſcience, produit un mouvement & plus grand & plus accéléré que ne feroit une autre puiſſance ſimplement appliquée.

Remarque.

2. La Méchanique, ſelon la définition de quelques Auteurs, traite proprement de toutes les loix du mouvement ; mais communément on reſtreint cette ſcience aux machines, par le moyen deſquelles la force mouvante devient plus capable de remuer une plus groſſe maſſe, ou de produire un mouvement plus accéléré.

DÉFINITION II.

3. On appelle *force* ou *puiſſance* ce qui produit

le mouvement. Ce qui reçoit le mouvement ou qui lui résiste, se nomme *masse* ou *poids*.

Corollaire I.

4. C'est pourquoi on met au nombre des forces mouvantes toutes les créatures animées & inanimées, comme les hommes, les brutes, l'air, l'eau, le feu, les poids, & les corps élastiques.

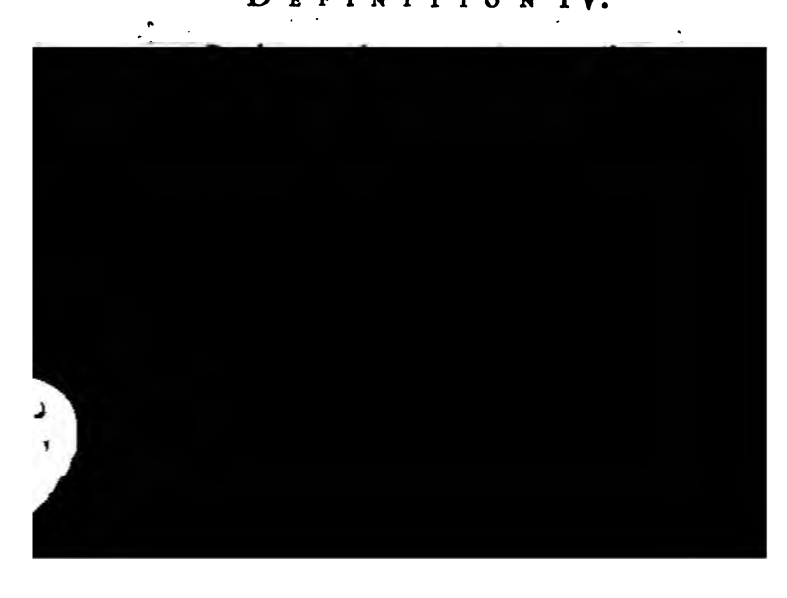
Corollaire II.

5. Puisque la Méchanique enseigne à produire un mouvement abrégé par le moyen d'une puissance, il faut qu'elle apprenne de quelle maniere on doit appliquer les hommes, les brutes, l'air, l'eau, le feu, &c. pour produire ce mouvement.

DÉFINITION III.

6. On appelle *force* ou *puissance vive* celle qui produit un mouvement actuel. Si cette puissance n'est qu'un poids soutenu, on la nomme *force* ou *puissance morte*, ou *qui soutient*.

DÉFINITION IV.



Remarque I.

9. Il eſt bon d'obſerver en général que quand on examine la force ou les propriétés d'une machine, on ne conſidere point la matiere dont cette machine eſt compoſée, ni la nature de la matiere; ni les différentes formes que cette machine peut prendre dans d'autres circonſtances, mais ſeulement ce qui conſtitue l'eſſence d'une telle machine, afin de connoître quelles machines ſont néceſſaires dans le cas dont il s'agit; car ſi par un trop grand ou trop long uſage la matiere, la forme, ou quelques autres obſtacles empêchoient que la machine eût tout ſon effet eſſentiel, cela ne doit point être regardé comme provenant de ſes principes qu'on conſidere ſéparément.

Corollaire.

10. Toutes les fois qu'on peut concevoir trois points dans le mouvement d'une machine, l'un auquel ce mouvement ſe fait, le ſecond auquel la puiſſance eſt appliquée, & le troiſieme qui ſoutient le poids, on concevra alors que cette machine eſt un levier.

Remarque II.

11. Cela bien conſidéré, on pourra non ſeulement porter un jugement exact ſur preſque tous les inſtruments & les autres ouvrages de l'art, mais encore rendre raiſon des mouvements ſurprenants des animaux & calculer toutes leurs forces : c'eſt ſur ce fondement qu'eſt établi tout ce que Borelli a écrit ſur le mouvement des animaux.

DÉFINITION VI.

Pl. I. Fig. 2.

12. *L'aissieu dans sa roue* est la roue AFDA ; dont les rayons sont attachés fixement à un cylindre, avec lequel elle peut tourner autour du centre commun C. Il suffit même, pour comprendre cette figure, de concevoir le cercle que décrit le cylindre lorsqu'il tourne sur son axe.

Corollaire.

13. On peut encore rapporter à l'aissieu dans sa roue le cercle que forme le cylindre tournant sur son axe, lorsque l'on conçoit que ce cercle est plus grand que le plan de la section. Par exemple, dans la Méchanique, les cabestans ordinaires FGHI sont du même genre que l'aissieu dans sa roue, parceque la traverse IH, qui dans le mouvement du cylindre tourne sur son axe FG, décrit un cercle. (§. 11 Géom.)

Fig. 3.

Remarque.

14. Lorsque l'on veut faire usage des roues, on les construit de différentes façons selon la différente maniere de communiquer la force, ou selon la

DÉFINITION VIII.

16. Le *tambour* ou *tympan* est une roue à laquelle une autre donne le mouvement par le moyen de ses dents.

DÉFINITION IX.

17. Si l'on forme le tambour de deux disques KL & MN, & qu'à la place des dents on y mette des fuseaux; on appelle cette machine une *lanterne*. Pl. I. Fig. 4.

DÉFINITION X.

18. La *poulie*, qu'on nomme encore le *rond* du *polyspate*, est un cercle ou un rond qui tourne autour de son centre C, pendant que la puissance D tire en haut le poids E. Fig 6.

DÉFINITION XI.

19. On appelle *plan incliné* AC celui qui fait un angle oblique ACB avec la ligne horizontale. Fig. 7.

DÉFINITION XII.

20. Si ce plan tourne autour d'un cylindre, il forme une *vis*. La *vis* mâle, ou simplement la *vis*, est celle qui a ses élévations à la surface extérieure du cylindre IK. Fig. 8.

DÉFINITION XIII.

21. La *vis femelle* LM est celle qui a les élévation à la surface intérieure d'un cylindre creusé à jour. On donne encore à cette vis le nom d'*écroue*. Fig. 8.

DÉFINITION XIV.

Pl. I. Fig. 1.

22. Le point C, autour duquel la machine peut se mouvoir, est appellé *centre du mouvement*, ou *centre du repos*.

DÉFINITION XV.

Fig. 1.

23. La *ligne de direction* est une ligne droite, le long de laquelle une puissance ou une masse est en mouvement actuel, ou pourroit être en mouvement, si elle n'étoit empêchée par quelque cause. Par exemple, si le fil qui soutient le poids O est coupé au point A, le poids doit tomber & décrira la ligne A O; cette ligne est celle qu'on nomme ligne de direction de ce poids. Pareillement si la puissance tire en H le long de la ligne B H, la ligne de direction de cette puissance sera B H.

DÉFINITION XVI.

Fig. 1.

24. La *distance du centre du mouvement* est la ligne CD, qui est menée perpendiculairement du centre du mouvement C à la ligne de direction BH.

Corollaire.



DÉFINITION XVII.

26. Le *centre de gravité* est le point où le corps se divise en deux parties, qui n'ont pas plus de pesanteur l'une que l'autre.

DÉFINITION XVIII.

27. Le *centre de grandeur* est le point où le corps est comme partagé en deux parties égales.

DÉFINITION XIX.

28. La *ligne horizontale* est celle dont tous les points sont également éloignés du centre de la terre.

Corollaire I.

29. La *ligne horizontale* est à proprement parler l'arc d'un cercle décrit du centre de la terre.

Corollaire II.

30. Comme dans les grands cercles sur-tout, les sous-tendantes, ou les cordes des petits arcs, sont presque la même chose que ces petits arcs, ou n'en different point sensiblement (§. 126 Géomet.), la ligne droite MP qui touche la vraie ligne horizontale au point donné C, est prise elle-même pour la ligne horizontale. Pl. I. Fig. 9.

DÉFINITION XX.

31. La *ligne horizontale apparente* MP est celle qui touche la vraie ligne horizontale au point donné C. Fig. 9.

DÉFINITION XXI.

32. La *gravité des corps* est cette force qui pousse les corps au centre de la terre.

Théorême I.

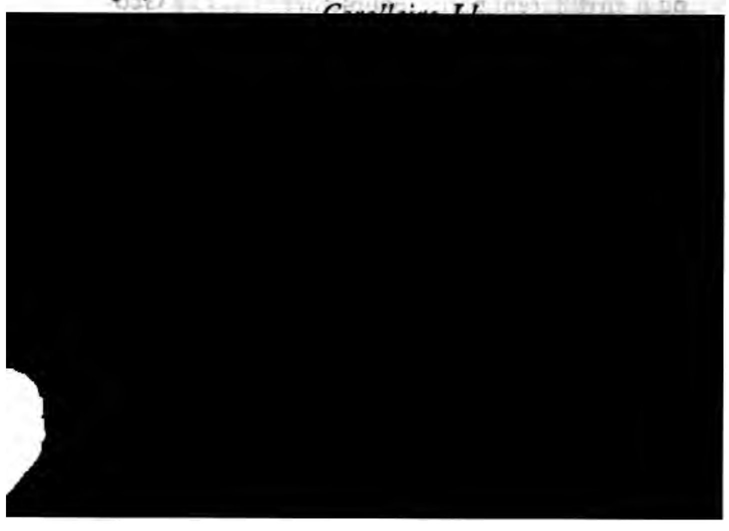
Pl. I. Fig. 10. 33. Si le corps DE est suspendu sur la ligne AB, de façon que cette ligne passe par le centre de gravité, ce corps doit être en repos; il y sera pareillement s'il est appuyé sur le centre de gravité.

Démonstration.

Le corps étant coupé en deux parties d'égale pesanteur par le centre de gravité, la partie E pese autant de son côté que la partie D pese du sien: il n'y a donc aucune raison pourquoi la partie D seroit plutôt élevée que la partie E; ni l'une ni l'autre ne sera par conséquent élevée; donc le corps grave doit être en repos. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

34. Donc ce qui soutient le *centre de gravité*, soutient aussi tout le poids du corps qui y est appuyé.



même largeur & même grosseur, le centre de gravité est le même que le centre de grandeur.

Démonstration.

Car dans ce cas il n'y a point de raison pourquoi des parties égales en grandeur ne peseront pas également ; elles ont donc une égale pesanteur : ainsi un corps étant divisé en deux parties également grandes par le centre de grandeur, & en deux parties également pesantes par le centre de gravité ; le centre de gravité sera donc au même point que le centre de grandeur. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême I.

37. Déterminer le centre de gravité de quelque corps que ce soit.

Solution.

1°. Mettez le corps donné HI sur une corde tendue, ou sur la pointe d'un prisme triangulaire FG ; remuez-le jusqu'à ce qu'il reste en équilibre, vous trouverez le centre de gravité dans la ligne KL sur laquelle il sera posé (§. 34). Pl. I. Fig. 11.

2°. Que si vous placez ce même corps sur la même corde, ou sur le même prisme selon la ligne MN, vous trouverez encore le centre de gravité au point O où les deux lignes se coupent (§. 34).

3°. On le trouve également en mettant un corps sur la pointe d'un poinçon, en le changeant de position jusqu'à ce qu'il soit en équilibre : un plat, une assiette, par exemple, sur la pointe d'une fourchette ou d'un couteau.

Théorême III.

38. Si la ligne de direction tombe sur la base sur laquelle ce corps est posé, il doit rester immobile, & il ne sauroit tomber; mais si-tôt que la ligne de direction s'éloignera de la base, le corps tombera du côté vers lequel la ligne de direction se porte.

Démonstration.

La ligne de direction est une ligne droite selon laquelle un corps se meut actuellement, comme dans le cas présent, ou se mettroit en mouvement s'il n'en étoit empêché (§. 23). Or si cette ligne tombe sur la base d'un corps, ce corps ne peut se mouvoir selon cétte ligne; il restera donc immobile. *Ce qui étoit d'abord à prouver.* Mais si la ligne de direction tombe hors de la base d'un corps, rien n'empêche que ce corps ne soit en mouvement en suivant cette ligne: il doit donc tomber. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

39. Plus donc la base sur laquelle un corps est placé se trouve grande, plus on aura de peine à

Démonstration.

Suppoſons que le rayon CL ne ſoit point perpendiculaire à la ligne MP, on pourra donc tirer du point L une autre perpendiculaire à la ligne MP, par exemple, la ligne LP (§. 69 Géom.) : & parceque l'angle P eſt un angle droit, la ligne LC ſera donc plus grande que la ligne LP. Mais comme la ligne LC eſt la même que la ligne LN, la ligne LN ſeroit donc plus grande que la ligne LP ; ce qui étant abſurde, l'angle qui ſe forme au point C doit être un angle droit. *Ce que j'avois à démontrer.*

Théorême IV.

41. La ligne de direction des corps graves eſt perpendiculaire à la ligne horizontale apparente.

Démonstration.

Les corps graves tendent par la force de la gravité vers le centre de la terre (§. 32) ; par conſéquent leur ligne de direction eſt la même que le rayon de la terre CL. (§. 23, Méch. & §. 13, Géom.)

La ligne horizontale apparente MP touche la circonférence de la terre au point C (§. 31). La ligne de direction des corps graves doit donc faire un angle droit avec la ligne horizontale apparente (§. 40) ; elle lui eſt par conſéquent perpendiculaire (§. 18, Géom.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

42. Comme toute la peſanteur des corps eſt

rassemblée dans le centre de gravité (§. 35), c'est de ce centre qu'il faut tirer perpendiculairement la ligne de direction des corps graves, jusqu'à la ligne horizontale apparente.

Problême II.

43. Trouver si un corps grave placé dans quelque endroit tombera ou non.

Solution.

1°. Il faut chercher le centre de la gravité (§. 37.)

2°. Tirez ensuite de ce centre une ligne perpendiculaire sur la ligne horizontale apparente (§. 69, Géom.) Si la ligne perpendiculaire tombe dans la base du corps, il ne tombera pas. Si elle s'écarte de la base, le corps tombera du côté où la ligne perpendiculaire s'éloigne de la base.

Démonstration.

La ligne perpendiculaire ayant été menée du centre de gravité vers la ligne horizontale apparente, elle sera la ligne de direction du corps (§. 42). Si elle tombe dans la base, le corps ne sauroit tomber; si au contraire elle s'en éloigne, le corps doit tendre dans son mouvement vers le côté où tombe la ligne de direction. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

44. Par la solution de ce problême on peut rendre raison de toutes les positions & de toutes les façons de marcher possibles des hommes & des

animaux, comme l'a fait M. Borelli dans son ouvrage du Mouvement des animaux, part. 1, prop. 145, & suivantes.

Théorême V.

45. Si l'on suspend aux deux extrémités AC du levier ABC deux poids inégaux G, F, qui seront en même raison que leurs distances réciproques le sont à l'égard du point d'appui B; l'un & l'autre sont en équilibre, & ils ne sauroient se mettre en mouvement.

Pl. I. Fig. 12.

Démonstration.

Supposons, par exemple, que le poids F pese une livre, & le poids G trois livres; que les lignes de direction CF & AG soient perpendiculaires à CA aux points A & C; les degrés de distance du poids F, qui ne pese qu'une livre, se compteront depuis B jusqu'à C, & ceux du poids G se compteront de A en B (§. 24); par conséquent dans notre hypothese AB : BC = 1 : 3; & comme les corps ne perdent rien de leur pesanteur, quelque changement qui se fasse dans leur figure, imaginons ces deux poids changés en deux cylindres qui aient une grosseur relative à chacun d'eux, de façon qu'une demi-livre de ce cylindre reçoive la longueur de la moindre distance AB; ainsi le cylindre IK, auquel a été changé le moindre poids F, contiendra deux parties égales à AB; & l'autre cylindre HI qui a été fait du gros poids G, en contient six parties. Que si l'on imagine la ligne BC prolongée vers D, jusqu'à ce que la distance de CD soit égale à la distance AB; & au contraire, si l'on imagine la ligne AB prolongée vers E jusqu'à ce que la distance AE soit égale

à la distance B C, la ligne E D sera égale à la longueur de tout le cylindre H K. Or la ligne E D est divisée en deux parties égales au point B, puisque depuis B jusqu'à E il y a quatre parties égales à A B, comme depuis B jusqu'à D. Le centre de gravité du cylindre H K étant le même que son centre de grandeur (§ 36), la ligne B M à laquelle il est suspendu passe par son centre de gravité ; le cylindre est donc en repos (§ 33) ; par conséquent ni l'un ni l'autre des deux cylindres H I & I K ne doit l'emporter, de même que les deux poids dont ils ont été formés ; ils doivent donc avoir la même pesanteur. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

46. C'est pourquoi si les poids F, G doivent être égaux, les distances A B & B C doivent être aussi égales : car F : G = A B : B C. Donc si F = C, A B le sera aussi à B C (§. 53, Arithm.)

Remarque.

47. Toutes les démonstrations que l'on peut faire dans toute la Méchanique sont appuyées sur ce seul Théorême : c'est pour le rendre plus familier, à l'exemple de Jungnickelius (Clef de la Méchanique, pages 107, 108), que je vais faire voir comment on peut le prouver par l'expérience.

Problême III.

48. Examiner la loi fondamentale de la Méchanique, ou mettre en expérience le précédent Théorême.

Solution.

Solution.

1°. Faites travailler par un menuisier un solide en forme de prisme quadrangulaire, dont la largeur excede la grosseur, & dont on puisse séparer 8 parties de même longueur; & de plus une partie d'une longueur double, une autre d'une triple, & une enfin d'une longueur quadruple.

2°. Mettez la partie qui a une longueur double sur la pointe d'un prisme triangulaire, vous verrez qu'elle restera en équilibre si la partie AC est égale à la partie CB.

Pl. I. Fig. 13.

3°. Que si vous placez sur le même prisme la partie qui a une longueur triple DE, de façon que FD comprenne deux parties, & EF une seule; il faudra, pour que DE soit en équilibre, que vous ajoutiez trois parties de la longueur simple sur la partie FE.

4°. Pareillement si vous mettez sur la pointe du prisme la partie d'une longueur quadruple GH, de façon que GI ait trois parties, & que HI n'en ait qu'une seule, il en faudra ajouter 8 autres sur HI, pour que GH soit en équilibre.

Toutes ces expériences sont conformes à la loi fondamentale que j'ai donnée dans la démonstration du théorême précédent.

Démonstration.

Supposons que les parties des divisions AC & CB, DF & FE, GI & IH, n'ont aucune pesanteur, & qu'à la place de ces pesanteurs on les suspende aux centres de leurs gravités, qui se trouvent au milieu (§. 36) des poids, qui égalent en même temps la pesanteur des parties & celle des

divisions qu'on auroit mises dessus (§. 35). Comme les divisions qui sont en équilibre sont aussi paralleles à l'horizon, les lignes de direction de ces poids doivent être perpendiculaires aux lignes AB, DE & HG (§. 41), & leurs distances du centre du mouvement étant partagées également par les demi lignes AC & CB, DF & FE, GI & IH, seront égales. Or les gravités des parties qui pesent également, étant en même raison que les distances considérées relativement l'une à l'autre : supposé, par exemple, IG de trois livres & IH avec les divisions placées dessus de 9 livres, IH n'aura qu'un degré de distance, tandis que IG en aura trois : il est donc clair que cette expérience confirme le théorême précédent. *Ce que nous avions à démontrer.*

Définition XXII.

49. La *balance* est un instrument par le moyen duquel on peut rechercher & découvrir la pesanteur des corps.

Problême IV.

Pl. II. Fig. 14.

50. Construire une balance juste & exacte.

Solution.

1°. Divisez le *fléau* AB en deux parties au point C, pour en faire deux bras AC & CB. Placez à l'extrémité de ces bras deux bassins de même pesanteur D, E.

2°. Placez perpendiculairement au point C l'aiguille CK, de façon que le fléau AB puisse se mouvoir facilement dans la châsse. Si après avoir suf-

pendu la balance, l'aiguille ne sort point de la châsse HI, il est manifeste que les corps placés dans les bassins sont d'une égale pesanteur.

Démonstration.

Si l'on suspend une balance au point I, l'anse HI sera perpendiculaire à la ligne horizontale (§. 41); par conséquent, lorsque l'aiguille CK est cachée dans l'anse, comme elle est perpendiculaire au fléau AB, celui-ci sera parallele à l'horizon. Mais comme les lignes de direction des poids D & E font des angles droits avec les bras AC & CB, leurs distances sont égales à ces bras (§. 24). Or AC & CB étant égaux, les poids suspendus de part & d'autre aux points D & E doivent aussi être égaux (§. 46). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

51. C'est pourquoi si les bras AC & CB ne sont pas aussi longs l'un que l'autre, la balance est trompeuse.

Problême V.

52. Eprouver si une balance est juste ou non.

Solution.

Mettez le bassin D à la place du bassin E, & E en D, ou changez les poids des bassins: si vous trouvez encore l'équilibre, la balance est juste; s'il n'y a plus d'équilibre, la balance est trompeuse.

Pl. II. Fig. 14.

Démonstration.

Si la balance est trompeuse, les bras ne sont point

également longs (§. 51), & par conséquent le bassin suspendu à celui qui a plus de longueur, doit être plus léger que l'autre (§. 45); c'est pourquoi si vous changez les bassins de bras & que vous mettiez le plus léger au bras le plus court, il n'y aura plus d'équilibre. *Ce que j'avois à démontrer.*

DÉFINITION XXIII.

Pl. II. Fig. 15.

53. La *Romaine* ou le *peson* est une balance, avec laquelle, par le moyen d'un poids, on trouve la pesanteur de différents corps.

Problême VI.

54. Construire une balance romaine.

Solution.

1°. Divisez la verge M N en autant de parties égales que vous voudrez.

2°. Mettez à l'extrémité de la premiere division O une languette ou lame de fer C P perpendiculaire à la verge, comme dans la balance ordinaire.

3°. Chargez le bras le plus court C M, jusqu'à ce qu'il soit en équilibre avec le plus long C N.

4°. Suspendez au bras qui a le plus de longueur le poids R, qui puisse glisser le long de la verge,

on peut par le moyen d'un seul poids peser les corps de différente gravité : l'instrument M N C est donc une balance romaine (§. 53). *Ce que j'avois à démontrer.*

Remarque.

55. Pour agir avec plus de sureté, il faut déterminer par expérience dans le bras le plus long les points 1, 2, 3, 4, &c. on peut alors se passer de mettre en équilibre les deux bras, sur-tout quand il s'agit de peser des masses considérables, comme un chariot chargé de foin ; car plus le bras le plus long surpasse le petit en pesanteur, moins il en faudra dans le poids que l'on fait glisser sur la verge pour peser les plus grandes masses.

Problême VII.

56. Connoissant la gravité du levier A B, la distance du centre de gravité V, les distances du poids A C & de la puissance C B avec le poids O, trouver la grandeur d'une puissance morte.

Pl. I. Fig. 1.

Solution.

1°. Imaginons un levier sans pesanteur, au lieu duquel on aura placé au centre de gravité V le poids G qui lui sera égal (§. 35) ; nous trouverons qu'il faudra placer le poids au point A, pour que le levier soit en équilibre (§. 45).

2°. Retranchons le poids trouvé du poids donné, le reste sera le poids que la puissance placée en B devra soutenir.

3°. Mais parceque ce poids est avec la puissance morte, qui doit être placée au point B, en même raison que B C & C A (§. 45), nous trou-

verons cette puissance par la regle de trois (§. 85 Arithm.)

EXEMPLE.

Supposons CA = 1, CV = 2', CB = 5, G = 10 liv. O = 300 liv.

1 — 2 — 10	5 — 1 — 280.
10	5) 25 (56 liv. la puissance
20 liv.	30
300 le poids	30
280	0

Problême VIII.

Pl. I. Fig. 1. 57. Connoissant la pesanteur du levier AB, la distance du centre de gravité CV, les distances de la puissance BC & du poids CA avec la force morte, trouver le poids.

Solution.

1°. Cherchez comme dans le problême précédent la partie du poids que le levier seul peut soutenir.

2°. Cherchez de même l'autre partie du poids que la puissance appliquée au point B peut aussi

EXEMPLE.

Supposons CA = 1, CV = 2, CB = 5, G = 10 liv. la puissance morte 56 liv.

1 — 2 — 10
10

20 La premiere partie du poids.

1 — 5 — 56
5

280 l'autre partie du poids.
20 la premiere.

300 le poids entier.

Problême IX.

58. Connoissant la gravité du levier G, le poids O, la puissance morte, la longueur & le centre de gravité V du levier AB, trouver le centre commun de gravité C, c'est-à-dire, le point d'appui où il faut poser le levier, pour que la puissance soutienne le poids. Pl. I. Fig. 1.

Solution.

1°. Cherchez d'abord le centre commun de gravité Z, celui de la puissance morte appliquée au point B, & celui de gravité du levier G, en disant, VB est à ZB, ou à la distance du centre commun de gravité, comme la somme de la puissance morte & de la gravité du levier est à la gravité du levier. (§. 45.)

2°. Retranchez ZB de AB, & vous aurez AZ.

3°. Imaginez le poids suspendu au point Z égal à la gravité du levier G, & à la puissance morte en

B prises ensemble (§. 35) ; vous trouverez comme auparavant la ligne CZ, & par conséquent le point C que vous cherchiez.

Exemple.

Supposez la puissance placée en B = *66*, la gravité du levier G = 10, le poids O = 300 livres, AB = *6*, VB = 3.

$$66 — 10 — 3$$

$$\frac{3}{30} \qquad \frac{30}{66}\,(0\,\frac{30}{66} = \frac{5}{11} = ZB.$$

$$\frac{66}{11} = AB.$$

$$\frac{61}{11} = AZ.$$

$$366 — 66 — \frac{61}{11}$$

c'est-à-dire, $61 — 11 — \frac{61}{11}$ (§. 59, 96, Arithm.)

$$\frac{11}{11}$$

$$\frac{61}{61}\,(1 = AC.$$

Théorême VI.

Pl. II. Fig. 16. 59. Si le poids est placé au point B, entre le centre du mouvement C & le lieu de la puissance morte A, celle-ci sera en même raison avec le poids qui est au point B, que la distance du poids CB avec la distance de la puissance CA.

Démonstration.

Prolongez C A vers D, jusqu'à ce que DC = C A; il est évident qu'alors la puissance qui est en A, a autant de valeur que la puissance qui est en D (§. 46). Or si la puissance qui est en D soutient le poids qui est en B, elle est avec lui en même raison que B C avec C D, ou C A (§. 45); par conséquent il est nécessaire que la puissance qui est en A, soit en même raison avec le poids B, comme B C l'est avec C A. *Ce que j'avois à démontrer.*

Remarque.

60. Nous nommerons dans la suite ce levier, *homodrome*, & le premier *hétérodrome*.

Problême X.

61. Connoissant la gravité E, & le centre de gravité F du levier homodrome C A, le poids G, la distance du poids C B & de la puissance morte C A, trouver la quantité de la force morte au point A. Pl. II. Fig. 16.

Solution.

1°. Cherchez la puissance qui doit être appliquée au point A, pour soutenir seulement le levier (§. 59.)

2°. Cherchez aussi la puissance qui, appliquée au même point A, puisse seulement soutenir le poids donné G. (§. 59.)

3°. Réduisez ces deux puissances trouvées en une somme; en les ajoutant l'une à l'autre, vous aurez la force que vous cherchiez.

EXEMPLE.

Soit CB = 1, CF = 3, CA = 6, G = 300 liv. E = 10 liv.

6 — 3 — 10
ou 2 1 10 (§. 95, 96, Arithm.)
1

~~10~~ (5 l. premiere partie de la puiss.
~~2~~

6 — 1 — 300
1

~~300~~ (50 l. l'autre partie de la puiss.
~~66~~ 5 liv. la premiere.

55 liv. la puissance entiere.

Remarque.

62. Pour comprendre tout l'ouvrage que Borelli a fait sur le mouvement des animaux, il suffit de se rendre familiers les problêmes que nous avons donnés touchant le levier, & de se souvenir de ce que nous avons dit au paragraphe 10. Je ne parlerai point ici d'une infinité de cas dans lesquels il faut faire usage de ces sortes de calculs.

Démonstration.

Car pendant que la puissance forme l'arc L M dans son mouvement, le poids en s'élevant forme celui de H N : l'espace que parcourt le poids est donc à celui que la puissance parcourt, ce que l'arc HN est à l'arc LM, c'est-à-dire, comme H I à I L, à cause de l'égalité des angles au point I (§. 40, Géom.) ; & par conséquent, comme la force morte est au poids (§. 45). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

64. Si vous abaissez la perpendiculaire N O du du point N sur H I, & du point M, celle qui est marquée M R sur I L, N I sera à l'égard de N O, comme M I à l'égard de M R (§. 10, Trigon.) ; par conséquent N I : M I = N O : M R (§. 83, Arithm.). L'espace que le poids parcourt en montant est donc à celui que la puissance parcourt en descendant, ce que la puissance morte est au poids.

Corollaire II.

65. Il s'ensuit de là qu'il faut autant de force pour lever un poids de trois livres à la hauteur d'un pied, qu'il en faut pour lever une livre à la hauteur de trois pieds, dans le même espace de temps.

Corollaire III.

66. Comme l'on mesure la vîtesse du mouvement d'un corps par l'espace qu'il a parcouru dans un temps déterminé, ainsi la vîtesse avec laquelle une puissance se meut sera en même raison avec

la vîtesse du mouvement d'un poids, qu'est un poids avec la force morte.

Remarque.

67. Ainsi nous voyons que le levier n'augmente point la force, mais qu'il la met en situation de produire un mouvement plus lent Si l'on veut donc accélérer ce mouvement, il faut placer la puissance au point H, & le poids au point L: alors la force est plus grande que le poids, & le mouvement se fera dans un moindre espace de temps.

Théorême VIII.

Pl. I. Fig. 2.

68. Si la ligne de direction de la puissance morte fait un angle droit avec le rayon de la roue A C, & que la ligne de direction du poids E fasse le même angle avec le rayon du cylindre C B, la puissance morte est au poids comme le rayon du cylindre C B au rayon de la roue A C.

Démonstration.

La puissance soutiendroit le poids quand il n'y auroit que la ligne A B : ainsi comme le centre du mouvement est au point C, le poids au point *B*, & la puissance morte appliquée à l'angle droit au point A, celle-ci sera à l'égard du poids, comme

Corollaire II.

70. Si l'on connoît l'angle GFC que la puiſſance forme avec le rayon de la roue auſſi connu, on trouvera par la Trigonométrie la ligne GC. (§. 20, Trigon.)

Corollaire III.

71. La puiſſance fait un très grand effet quand la ligne de direction fait un angle droit avec le rayon de la roue. (§. 25, 45.)

Corollaire IV.

72. Tous les problêmes qui ſont propoſés ſur le levier peuvent être appliqués aux roues, parce-que la roue peut être conſidérée comme un levier à raiſon de la puiſſance morte. (§. 10.)

Problême XI.

73. Connoiſſant le poids C, & les rayons des aiſſieux BH, AD, EF, & des roues BA, DE, FG, trouver la force morte qui doit être placée au point G.

Pl. II. Pg. 19.

Solution.

1°. Cherchez la puiſſance qui doit être appliquée à la circonférence de la premiere roue pour pouvoir ſoutenir le poids C ſuſpendu au cylindre BH. (§ 68.)

2°. Regardez cette puiſſance comme un poids ſuſpendu au cylindre de la ſeconde roue. Déterminez encore la puiſſance qui, étant appliquée à la circonférence de cette roue, puiſſe ſoutenir & la roue & le poids. (§. 68.)

3°. Continuez cette opération jusqu'à ce que vous ayez trouvé la puissance qui doit être appliquée à la derniere circonférence.

EXEMPLE.

Soit C = 6000 liv. BH = 6, AB = 34, AD = 5, DE = 35, EF = 4, FG = 27.

34 — 6 — 6000			1 17 1884 18000 17777 111	{	1058 $\frac{14}{17}$ ou 1059 puissance à appliquer en A.
ou 17	3	3			
		18000			
35 — 5 — 1059			301 1059 777	{	151 $\frac{2}{7}$ puissance en E.
7	1				
27 — 4 — 151 $\frac{2}{7}$			1 1 161 608 177 1	{	22 $\frac{11}{27}$ puissance en G.
		4			
		605 $\frac{1}{7}$			

Remarque.



Théorême IX.

75. Si la puissance met un poids en mouvement par le moyen de l'aissieu dans sa roue, l'espace de la puissance est en même raison avec l'espace que le poids parcourt, comme le poids avec la puissance morte.

Pl. I. Fig. 2.

Démonstration.

Pendant que la roue tourne une fois, le cylindre IBK fait aussi un tour (§. 12); & ainsi le poids E est élevé à la hauteur d'autant de pieds que la circonférence de la roue en contient: donc la circonférence du cylindre représente l'espace que le poids parcourt, comme la circonférence de la roue celui que la puissance parcourt. Ces deux espaces sont donc l'un à l'égard de l'autre, comme la circonférence du cylindre à l'égard de la circonférence de la roue; ou, ce qui revient au même, comme le rayon du cylindre CB à l'égard du rayon de la roue CA; & par conséquent comme la puissance morte à l'égard du poids (§. 68). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

76. Il faut observer que lorsque plusieurs roues s'engrenent l'une dans l'autre, si elles sont attachées au même cylindre, elles font autant de tours les unes que les autres dans le même espace de temps. Si elles ne sont point attachées au même cylindre, & qu'une petite reçoive son mouvement d'une grande, pendant que celle-ci fait un tour, celle-là en doit faire autant que la grande contient de fois la circonférence de la petite, ou, ce qui revient au même, autant que le nombre des

dents de la grande doublera le nombre des dents de la petite.

Problême XII.

Pl. II. Fig. 19.

77. Connoissant en quelle raison sont les rayons ou les circonférences des petites roues avec les rayons & les circonférences des grandes, trouver les tours que fait une roue qui tourne avec grande vîtesse, tandis qu'une grande, dont le mouvement est lent, ne tourne qu'une fois.

Solution.

1°. Divisez les circonférences des grandes roues par les circonférences des petites.

2°. Multipliez les quotients les uns par les autres, le produit indiquera le nombre des tours que fait la roue G qui tourne avec vîtesse, dans l'espace de temps que la roue A n'en fera qu'un, en tournant lentement. (§. 76.)

EXEMPLE.

Soit la circonférence de la roue A 24, de la moindre D 12, de l'autre plus grande E 36, & de l'autre plus petite F 9.



nombre des dents, parceque dans les roues qui se rencontrent, les dents sont aussi grandes les unes que les autres.

Problême XIII.

79. Connoissant le nombre des révolutions de la roue qui tourne avec vîtesse, tandis que celle qui ne tourne que lentement ne fait qu'un seul tour, trouver le nombre des roues & le nombre de dents que contiennent ces roues & ces pignons, ou le nombre des fuseaux qui forment ces lanternes.

Solution.

1°. Réduisez en ses produisants le nombre donné des révolutions : autant il y aura de produisants, autant il faudra de roues dentées & de pignons ou lanternes.

2°. Multipliez séparément par chaque produisant trouvé un nombre de dents que vous aurez déterminé dans les pignons, les produits vous donneront le nombre des dents des roues qui s'engrenent avec les pignons. (§. 77, 78.)

EXEMPLE.

Pl. II. Fig. 19.

Une roue qui tourne avec vîtesse fait 40 révolutions, tandis que celle qui tourne lentement n'en fait qu'une. Comme 40 est le produit de 5 par 8, on conçoit qu'il faut deux roues dentées, & autant de pignons ou lanternes qui s'engrenent dans ces roues. Si les lanternes ont six fuseaux, la roue A qui tourne lentement aura 48 dents, celle du milieu E en aura 30, & la troisieme G, à laquelle la puissance est appliquée, n'en aura point, parcequ'elle ne doit recevoir sa figure

que de la maniere dont on jugera à propos d'appliquer la puiſſance.

Problême XIV.

80. Connoiſſant la puiſſance & le poids, trouver le nombre des roues, & les raiſons de leurs rayons aux rayons des axes, ou petites roues attachées au même cylindre que les grandes.

Solution.

1°. Diviſez le poids par la force, afin de connoître combien de fois celle-ci eſt renfermée dans celui-là.

2°. Séparez le quotient des produiſants car le nombre des produiſants eſt préciſément le nombre des roues; & les diametres des pignons, tambours, ou lanternes, ſont en même raiſon avec les diametres des roues appliquées au même cylindre, que l'unité avec chaque produit (§. 73).

EXEMPLE.

Suppoſons le poids de 30000 livres, & la puiſſance de ſoixante livres, le quotient réduit aux produiſants 4. 5. 5. 5. ſera de 500 livres.

On peut donc faire quatre roues, dans l'une

lement, en divisant le nombre qui doit être réduit par des petits nombres. Quelquefois le nombre donné ne peut se réduire en nombres purement entiers : dans ce cas il faudra retenir la fraction avec ces nombres entiers ; ou, si la chose est praticable, il faut un peu augmenter le nombre jusqu'à ce qu'il puisse être exactement divisé.

Théorême X.

82. Si la puissance K, dont la direction DK est parallele à la longueur du plan A G, soutient le corps D sur le plan incliné AC, la puissance K est en même raison avec le corps D, que la hauteur du plan AB avec la longueur AC. Pl. I. Fig. 7.

Démonstration.

Soit DH la ligne de direction du poids D, nous pouvons concevoir toute la pesanteur comme réunie dans le seul point F (§. 23, 35) ; par conséquent EF est la distance du poids à l'égard du centre du mouvement, & ED la distance de la puissance (§ 24). Mais comme DEF représente un levier (§. 10) dont le centre du mouvement est au point E, la puissance K, qui est au point D, est à l'égard du poids D, qui est au point F, comme EF à l'égard de ED (§. 45) : & parceque les angles DEG & EFG sont droits, & que l'angle EGF est commun aux deux triangles EFG & DEG, l'angle EDF sera donc égal à l'angle FEG, & l'angle DEF à l'angle EGF (§. 78 Géom.) ; donc EF : ED = GF : EG (§. 148 Géom) : & comme les angles verticaux au point G sont égaux (§. 40, Géom.), & les angles formés aux points F & H sont droits, GF : EG sera égal à GH : GC (§. 148

Géom.). Enfin comme GH : GC = AB : AC (§. 149 Géom.), & par conséquent EF : ED = AB : AC (§. 57 Arithm.). AB est à l'égard de AC, comme la puissance morte à l'égard du poids. *Ce que j'avois à démontrer.*

Théorême XI.

Pl. II. Fig. 20. 83. Si le poids R, placé sur le plan incliné LN, est soutenu par la puissance dont la direction RI est parallele à la base MN, la puissance est à l'égard du poids, comme la hauteur LM à l'égard de la base MN.

Démonstration.

On voit par la démonstration du théorême précédent (§. 82), que l'on peut regarder le cas présent comme si dans un levier TQS la puissance étoit placée au point T & le poids au point S : par conséquent la puissance est à l'égard du poids comme QS à l'égard de TQ ou de RS (§. 45) : & comme par la démonstration dont nous venons de parler on a prouvé que les triangles RQS, SQO, OPN & LMN sont semblables, on aura QS : SR = SO : QS = OP : PN = LM : MN (§. 148, 149 Géom.) ; & par conséquent la puissance est en même raison avec le poids, que LM avec MN.

(§. 20). Or la puissance a la direction de son mouvement parallele à la base.

Corollaire II.

85. Par conséquent plus les filets ou arêtes de la vis sont serrés, plus la vis a d'efficace, la même grosseur du cylindre toutefois posée.

Corollaire III.

86. Si le poids commence son mouvement en N & va jusqu'à O, il a été élevé à la hauteur OP, & la puissance suit dans son mouvement la ligne PN; donc l'espace parcouru par la puissance est à l'égard de l'espace que parcourt le poids, comme le poids à l'égard de la puissance morte (§. 83).

Pl. II. Fig. 20.

Corollaire IV.

87. La même chose se trouve dans la vis; car tandis que la puissance est en mouvement autour de la vis, le poids baisse par la distance des filets; par conséquent l'espace que le poids parcourt est en même raison avec l'espace que la puissance parcourt, que la distance de deux filets avec la circonférence de la vis, c'est-à-dire, comme la puissance morte avec le poids (§. 84).

Problême XV.

88. Connoissant la puissance, la circonférence de la vis & la distance des filets, déterminer la résistance que la puissance peut vaincre par le moyen de la vis.

Solution.

Cherchez un quatrieme nombre proportionnel à

la distance des filets, à la circonférence de la vis, & à la puissance §. 85 Arithm.), & vous aurez ce que vous cherchez.

EXEMPLE.

Soit la distance des filets 3″, la circonférence de la vis de 25″, la puissance de 30 livres.

3 — 25 — 30
1   10   10   (§. 59 Arithm.)

Résistance 250 à vaincre.

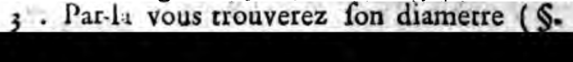
Problême XVI.

89. Connoissant la puissance & le poids, trouver le diametre de la vis & la distance des filets.

Solution.

1°. Divisez le poids par la force; 1 sera la distance des filets, & le quotient sera la circonférence de la vis (§. 84).

2°. Multipliez par ce quotient que vous avez trouvé, la distance des filets que vous aurez prise par pouces ou par lignes, suivant les circonstances, & vous aurez la circonférence de la vis en pouces ou en lignes. (§. 85 Artithm.)


3°. Par-là vous trouverez son diametre (§.

EXEMPLE.

Soit le poids de 250 livres, la force de 30.

2
250 (8 $\frac{1}{3}$
30

Soit la distance des filets 3'''.
La circonférence de la vis 25.

314 — 100 — 25
100

30 2500
342 (7 $\frac{302}{314}$ ou 7 $\frac{151}{157}$ le diametre de la vis.
2500
314
280

Corollaire.

90. Transportez sur la ligne BC la circonférence trouvée de la vis 25'''; élevez une perpendiculaire A B sur B (§. 70 Géom.), achevez le rectangle ABCD (§. 99 Géom.), transportez sur cette perpendiculaire les distances des filets, depuis B jusques en A, & depuis C jusques en D, autant de fois qu'il doit y avoir de filets, & tirez les filets B1, 1.2, 2.3, 3.4. &c. le plan ainsi marqué, appliqué autour d'un cylindre dont la circonférence est égale à BC, marquera les filets qu'on doit former sur le cylindre.

Pl II. Fig. 21.

Remarque.

91. On tourne souvent la vis par le moyen d'une manivelle, qui avec le cylindre forme une machine du même genre que la roue avec son aissieu (§. 13), & qui par conséquent augmente la force de la vis (§. 68).

Définition XXIV.

Pl. II. Fig. 22. 92. On appelle vis sans fin celle qui fait tourner une roue à dents

Corollaire I.

93. Les dents de la roue étoilée doivent s'engrener dans les filets obliques de la vis.

Remarque.

94. La vis infinie n'a besoin que de trois filets.

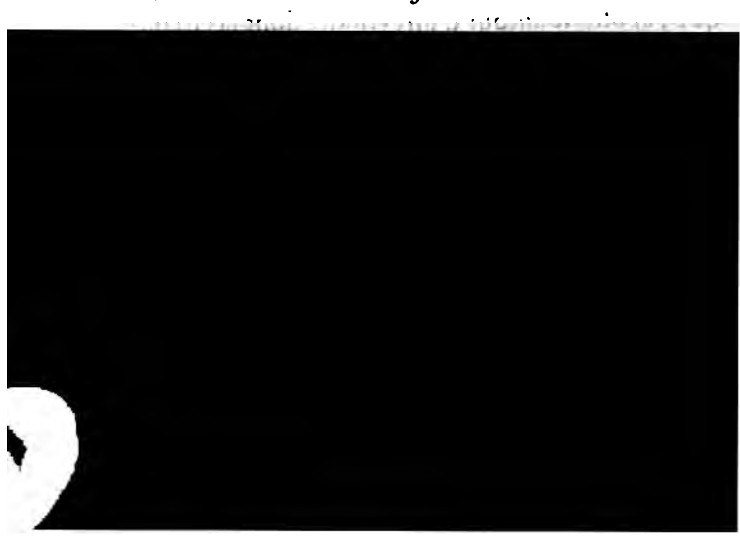
Corollaire II.

95. Tandis que la vis fait un tour, la roue n'avance que d'une dent ; de là vient que le mouvement de la roue est très lent.

Théorème XII.

Pl. I. Fig. 6. 96. Si la force D, par le moyen d'une corde qui entoure une poulie, soutient le poids E, la force sera égale au poids.

Démonstration.



çon que les deux cordes ſoient paralleles, & que la poulie ſoit élevée avec le poids pendant le mouvement, la puiſſance ſera à l'égard du poids comme 1 à l'égard de 2.

Démonſtration.

Comme la corde eſt fixée au point D, & le point F ſuſpendu au point H, la puiſſance eſt à l'égard du poids, comme A H à l'égard de A B (§. 59): or A H $= \frac{1}{2}$ A B (§. 18). La puiſſance eſt donc la moitié du poids. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

98. Il s'enſuit donc que dans les *Polyſpaſtes*, ce ne ſont pas les poulies ſupérieures, mais les inférieures qui en augmentent l'effet.

Théorême XIV.

99. Si dans le polyſpaſte toutes les cordes MN, SX, QR, PO, TV ſont paralleles, la puiſſance placée en Z eſt à l'égard du poids W, comme 1 eſt au nombre des cordes que le poids tient tendues.

Pl. II. Fig. 24.

Démonſtration.

Comme dans ce cas le poids bande également chaque corde, elles participent également à tout le poids: c'eſt pourquoi la puiſſance placée en Z n'a rien à ſoutenir que la partie du poids que ſoutient la corde MN (§. 96); par conſéquent la puiſſance eſt au poids comme 1 eſt au nombre des cordes que le poids tient tendues. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

100. Si le poids pese 500 livres, & qu'on le divise par le nombre des cordes 5, il en résultera que la puissance est 100.

Corollaire II.

101. Si l'on multiplie la puissance 100 par le nombre des cordes 5, vous trouverez que le poids pese 500.

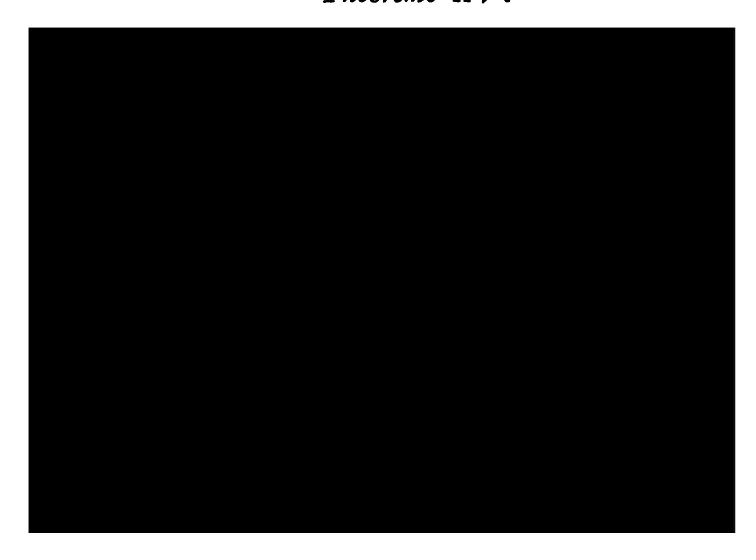
Corollaire III.

102. Si vous divisez par la puissance 100 le poids 500, vous trouverez le nombre des poulies, parceque le nombre, tant des supérieures que des inférieures prises ensemble, est le même que celui des cordes.

Remarque.

103. Quelquefois, pour ne pas donner trop de hauteur au polyspaste, on ne place point les poulies l'une sur l'autre, mais à côté l'une de l'autre.

Théorême XV.



courcir d'un pied; la puiſſance doit donc tirer la corde à elle en longueur d'autant de pieds que le polyſpaſte contient de cordes; par conſéquent l'eſpace qu'elle parcourt eſt à l'égard de celui que le poids parcourt, comme le nombre des cordes à l'égard de l'unité, c'eſt-à-dire, comme le poids à l'égard de la puiſſance morte (§. 99). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême XVI.

105. Dans le *coin* la puiſſance eſt au poids ou à la réſiſtance du corps qui doit être fendu, ce que la moitié de la groſſeur ML eſt à la longueur MN.

Pl. II. Fig. 10.

Démonſtration.

Le coin eſt compoſé de deux plans inclinés; & comme c'eſt la même choſe que le poids ſoit tiré par le montant du plan, ou que celui-ci ſoit pouſſé en avant ſous celui-là; & que d'ailleurs la direction de la puiſſance qui diviſe les corps par le moyen du coin revient à la longueur du coin, la puiſſance eſt au poids comme la moitié de la groſſeur ML à la longueur MN (§. 83). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

106. Il s'enſuit de là que plus un coin eſt aigu plus il a d'effet; parceque le rapport de ML à MN feroit bien moindre dans un coin moins aigu que dans celui qui le feroit davantage.

DÉFINITION XXV.

107. *La roue directe* eſt celle ſur laquelle l'eau

tombe, & la fait tourner par sa pesanteur, en passant par-dessus.

DÉFINITION XXVI.

108. *La roue rétrograde* est celle qui étant suspendue sur l'eau, en reçoit un mouvement rétrogressif que l'eau lui donne en coulant par-dessous.

Corollaire I.

109. Comme il est rare, excepté dans les grandes rivieres, que l'eau ait assez de rapidité pour faire tourner les roues des moulins, il faut la faire tomber de haut pour lui donner la rapidité requise & propre à faire tourner des corps pesants; d'où l'on doit conclure qu'il faut nécessairement placer la roue dans un lieu beaucoup plus bas que celui d'où l'eau coule.

Corollaire II.

110. L'eau prend sa pente successivement de lieu à autre: il faut donc, pour qu'elle acquiere assez d'impétuosité, changer cette pente en précipice, & par conséquent examiner de quelle nature est cette pente, c'est-à-dire, de combien le lieu où la roue doit être placée, est plus près du centre de la terre que celui d'où l'eau coule.

terre (§. 28), il ne faut que tirer cette ligne horizontale d'un lieu à un autre, & mesurer la profondeur de celui-ci au-dessous de la ligne horizontale de l'autre.

Corollaire II.

113. Il s'ensuit de là que pour trouver le niveau des eaux, il faut d'abord trouver la ligne horizontale.

Problême XVII.

114. Faire *un niveau*, c'est-à-dire, un instrument par le moyen duquel on trouve la ligne horizontale.

Pl. II. Fig. 25.

Solution.

1°. Tracez sur une planche bien polie le demi-cercle ACBD que vous diviserez en deux parties égales au point du centre C par une petite ligne DH.

2°. Placez deux crochets aux points F & E.

3°. Suspendez au centre une boule de plomb par le moyen d'un fil de soie ou autre. Si cet instrument est attaché à une corde par les crochets E, F, & que le fil de soie tombe sur la ligne DH, la corde tendue & le diametre de l'instrument AB feront une partie de *la ligne horizontale apparente.*

Démonstration.

La ligne de direction des corps graves est perpendiculaire à la ligne horizontale apparente (§. 41). Or le fil CD est la ligne de direction du plomb (§. 23), & se trouve perpendiculaire à la ligne AB, s'il touche la ligne DH (§. 17, 37, Géom.): donc AB est, dans ce cas, la partie de

la ligne horizontale apparente. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

115. Riccioli (*Geogr. refor. Lib. 6, cap. 25, f. 229*) a remarqué que cette ſorte de niveau, à moins qu'il ne ſoit extrêmement grand, peut induire en erreur pour les lieux éloignés les uns des autres, parcequ'à peine marque-t-il la différence de 5 minutes & même d'un demi-degré : s'il eſt auſſi trop grand, on le tranſporte avec peine : dans ce cas, au lieu du demi-cercle, l'on joint un ais étroit EGHF au diametre AB, de façon qu'il faſſe un angle droit avec lui, & que le rayon CD puiſſe être prolongé juſqu'à G. On trouvera dans notre grand *Cours de Mathématique*, les autres eſpeces de niveaux qui ſont composés de quarts de cercle armés de pinnules.

Pl. III. Fig. 26.

DÉFINITION XXVIII.

116. *La pente des eaux* eſt une ligne droite qui indique de combien leur ſurface eſt plus éloignée du centre de la terre dans un endroit que dans un autre.

Problême XVIII.

lez niveler ont au-dessus de la surface des eaux, & marquez ces hauteurs sur le papier.

Pl. III. Fig. 27.

2°. Placez le niveau sur le rivage A, & enfoncez sur l'autre B un bâton perpendiculairement à l'horizon, auquel vous attacherez un chassis quarré teint en noir, mais marqué au milieu d'un cercle blanc, ou d'une croix blanche. Qu'il soit attaché de façon qu'on puisse le fixer aux différents points de ce bâton par le moyen d'une vis.

3°. Baissez ou levez ce chassis jusqu'à ce que celui qui bornoie par les pinnules du quart de cercle apperçoive le centre de ce quarré.

4°. Cherchez depuis A jusqu'à D la hauteur de l'œil, & depuis B jusqu'à C celle du centre du chassis C.

5°. Ajoutez au premier la hauteur du rivage A, & au second celle du rivage B.

6°. Comme par cette méthode on voit clairement de combien la ligne C D, parallele à la ligne horizontale A, s'écarte dans l'un & l'autre lieu de la superficie des eaux, il ne faut que soustraire la premiere somme trouvée de l'autre : le reste sera la pente des eaux que l'on cherchoit.

On doit concevoir ici le niveau qui a été placé en P, comme placé en A, au lieu du chassis D.

Exemple.

La hauteur du rivage en A 64″. La hauteur du rivage en B 58″.

AD 56	BC 72
120	130
	120
	La pente 10

7°. Si d'un lieu choisi on ne peut appercevoir l'autre, on procédera par parties en divisant la distance donnée en parties que l'on nivellera séparément; mais comme on peut rencontrer dans cet espace des endroits plus élevés que celui où l'on veut commencer à niveler, on placera le niveau E F entre deux bâtons A Q & B H, & l'on marquera séparément à gauche les hauteurs du centre du chassis D, & à droite celles du centre du chassis C.

Formez une somme des premieres hauteurs; additionnez aussi les secondes, & faites la soustraction des unes par les autres; le reste marquera la pente des eaux. La hauteur marquée à gauche AD 34″. La hauteur à droite BC 57″.

	BO 68.		MP 102.
La hauteur du rivage en A	64	La hauteur du rivage en M	58
	166		217
			166
		La pente	51

On fait cette opération avec le niveau, tel que nous l'avons décrit (§. 114), en tendant des cordes par le moyen des piquets; & dans ce cas on n'a pas besoin de chassis quarrés.

FL; car si on les ajustoit à angles droits, le vent ne les feroit pas tourner. Les mieux adaptés sont ceux qui coupent l'axe à l'angle de 54 degrés, parce-qu'alors le vent a beaucoup de force pour les faire tourner.

2°. Comme il faut que les volants regardent le vent, toute la machine doit tourner autour de l'axe K, afin que par le moyen du levier PQ attaché à la tourette on puisse tourner la machine du côté qu'on voudra.

Autre façon de Moulin à vent.

1°. Elevez une tour en pierre jusqu'au toit, qui ne doit pas être fixé de façon qu'il ne puisse tourner.

Pl. III. Fig. 29.

2°. Faites passer par le toit un cylindre, auquel soient attachés quatre volants, tels que nous les avons dépeints ci-dessus.

3°. Attachez fixement à ce toit une poûtre qui sorte en dehors jusqu'à B. Ajoutez-en une autre AB au bout de la premiere, de façon qu'elle descende directement jusqu'à la plate-forme bâtie autour du moulin.

4°. Joignez encore celle dont nous venons de parler à une autre AC, qui doit être aussi fermement attachée au toit au dessus de C.

5°. Plantez des crochets de fer d'espace en espace sur la plate-forme; puis ayant ajusté un cable au bout de ces solives A, vous le ferez passer par un de ces crochets, & par le moyen d'un cabestan mobile vous ferez tourner le toit.

Remarque.

119. On se sert des moulins de la premiere

ſorte en Allemagne & en diverſes provinces de France ; les Hollandois emploient communément la ſeconde qui eſt auſſi beaucoup en uſage dans la Saintonge & le Poitou. Pour pouvoir faire tourner commodément le toit de ces derniers, on fixe un anneau de fer cannelé tout autour du haut de la tourette, au fond duquel on inſere d'eſpace en eſpace des poulies de laiton, dont une partie de la circonférence doit ſortir un peu de la cannelure, ſur laquelle on ajuſte enfin un autre cercle de fer comme le premier, & ſur ce ſecond on éleve le toit.

Problême XX.

120. Faire une machine qu'un cheval ou autre animal puiſſe faire tourner.

Solution.

1°. Elevez verticalement un cylindre, auquel vous joindrez un timon de 7, 8 pouces, ou davantage, ſelon l'exigence des cas, pour qu'un cheval puiſſe y être attaché.

2°. Placez horizontalement au deſſus de ce cylindre une roue étoilée un peu grande, que vous attacherez à ce cylindre par de groſſes ſolives égales en nombre & en longueur aux rayons de la

Problême XXI.

121. Faire une machine qu'un animal puisse faire mouvoir avec les pieds.

Solution.

1°. Faites une grande roue garnie de traverses, telles que les ont les *roues directes.*

2°. Enfermez l'animal dans une étable bâtie au-dessus, & dont le plancher doit être percé, afin que l'animal appuie ses pieds de derriere sur les traverses.

3° L'animal appuyant ses pieds sur une traverse, la pousse en arriere, & se trouve obligé de mettre les pieds sur la traverse suivante; ainsi la roue est toujours en mouvement.

Remarque.

122. S'il ne s'agit que de faire tourner une broche, ou tel autre poids peu pesant, au lieu de traverses, la roue doit être garnie en devant avec des ais minces: on y enferme un chien dressé pour cela qui la fera tourner. C'est un tambour de tournebroche.

Problême XXII.

123. Faire une machine qu'un homme puisse mettre en mouvement en l'abaissant.

Solution.

Attachez à un cylindre placé horizontalement plusieurs bras qui passent par le centre de l'axe: si vous les baissez successivement avec la main, le cylindre tournera sur son axe.

Pl. III. Fig. 30.

Problême XXIII.

124. Mouvoir une machine en la tournant.

Solution.

Pl. III. Fig. 31. Adaptez à un cylindre une manivelle ou un rectangle ABCD, tel que celui qui eſt dépeint à la figure 31, ou courbé en arc de cercle EFG comme à la figure 32; par le moyen de ces manivelles vous tournerez le cylindre. Fig. 32.

Problême XXIV.

125. Mouvoir une machine en tirant.

Solution.

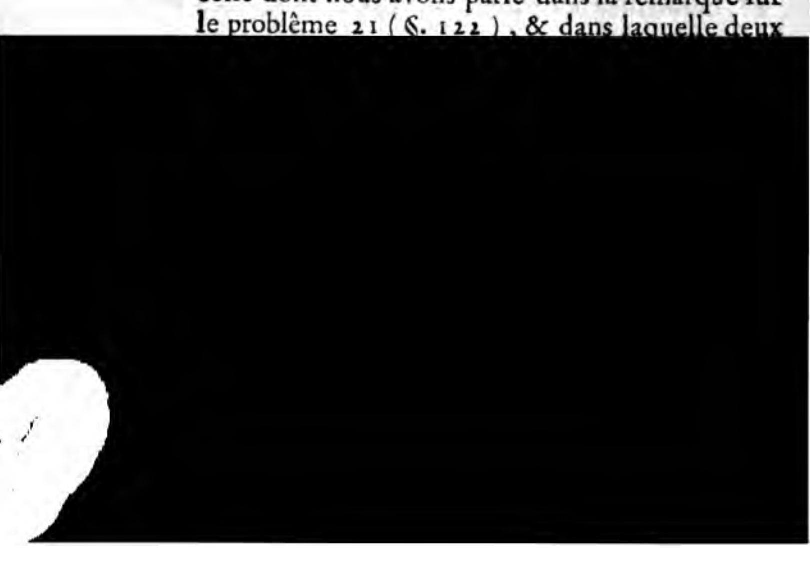
Pl. I. Fig. 3. On le fait par le moyen d'un *treuil* ou *cabeſtan* FGIH.

Problême XXV.

126. Mouvoir une machine en la foulant avec les pieds.

Solution.

Faites une grande roue de la même forme que celle dont nous avons parlé dans la remarque ſur le problême 21 (§. 122), & dans laquelle deux



verge ou corde EH attachée à la manivelle BL.

Si vous posez le pied au point G, le levier baissera : il s'élévera au contraire lorsque vous leverez le pied ; & ainsi le cylindre tournera.

Corollaire.

127. Comme, dans le dernier cas, le poids que nous devons supposer placé au point H est plus éloigné du centre du mouvement que le pied posé au point G, la force doit être plus grande que le poids qui doit être mis en mouvement (§. 59) : aussi ne se sert-on de cette façon de mettre en mouvement qu'à l'égard des poids qui ne sont point considérables. On peut cependant avec moins de force mouvoir le levier, en appliquant la verge ou corde en G & la main en H.

Problême XXVI.

128. Faire une machine qui puisse se mouvoir par le moyen d'un poids qui descend.

Solution.

1°. Entortillez une corde à un cylindre LM placé horizontalement. Pl. III. Fig. 35.

2°. Faites-la passer autour de la poulie G attachée au plancher, ou à un autre endroit élevé.

3°. Attachez enfin un poids P à son extrémité ; le poids que sa pesanteur fait descendre développe la corde & fait tourner le cylindre.

Corollaire I.

129. Plus l'endroit d'où le poids descend est élevé, plus la corde se développe lentement &

plus le mouvement dure, (car dans ce cas elle eſt plus longue).

Corollaire II.

130. Veut-on faire durer le mouvement plus long-temps, qu'on faſſe paſſer la corde par un polyſpaſte FG, auquel on ſuſpendra le poids P. Suppoſons, par exemple, qu elle paſſe par quatre poulies, le cylindre doit céder quatre pieds de corde avant que le poids ait deſcendu un pied de hauteur.

Problême XXVII.

131. Aider la force mouvante à lever un poids.

Solution.

Suppoſons, par exemple, que le poids qu'on veut lever eſt de 100 livres.

III. g. 36. 1°. Attachez à ce poids E une corde que vous ferez paſſer par une poulie HF.

2°. Attachez à l'autre bout de cette corde le poids D, preſque égal en peſanteur à celui que vous devez lever.

3°. Si vous tirez la corde du côté du poids

cylindrique, & vous attacherez au premier bout une chaîne ou une corde à boyau.

3°. Comme l'élaſticité eſt plus forte au commencement de la tenſion, & qu'elle tire avec moins de force ſur ſa fin, la fuſée G L H I à laquelle eſt attachée la chaîne ou la corde, ne doit pas avoir la forme de cylindre, mais de cône: car quoique la puiſſance tire avec plus de force au commencement, & plus lentement ſur la fin, elle eſt cependant d'abord plus proche du centre du mouvement que ſur la fin, & par conſéquent dans le premier cas elle a moins d efficace, & dans l'autre elle en a davantage. (§. 133.)

Remarque.

133. On a trouvé par expérience, de combien la fuſée G H doit augmenter en groſſeur depuis G juſques en H; car on a jugé par la vue & par l'ouie ſi une montre, qui reçoit tout ſon mouvement de l'élaſticité, avoit ce mouvement uniforme, ou non. Et c'eſt avec raiſon que Schot (Techn. Curieuſe, liv. 9, chap. 4, prop. 10, page 641) veut que l'on examine aux oſcillations d'un balancier, ſi les circonvolutions d'une roue qui ſe meut lentement ſont d'une auſſi longue durée les unes que les autres.

Problême XXIX.

134. Modérer le mouvement des machines, de maniere qu'il ſoit toujours uniforme. Pl. III. Fig. 34.

Solution.

Il faut ſe ſervir pour cela de roues poſées en équilibre MN, dont la circonférence eſt garnie de plomb, ou qui ont quatre poids égaux poſés

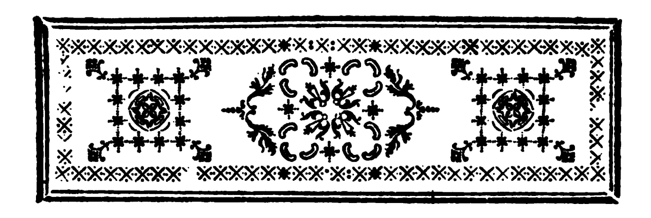
à diſtance égale : c'eſt pour cette raiſon qu'on met les balanciers aux Automates.

Corollaire.

135. Ces roues à contrepoids ſont néceſſaires dans les machines que les hommes ou les animaux mettent en mouvement, pour rendre ce mouvement égal.

Fin de la Méchanique.





ÉLÉMENTS D'HYDROSTATIQUE.

DÉFINITION I.

1. L'HYDROSTATIQUE est la ſcience de l'action des fluides ſur les corps, & du rapport des peſanteurs des différents fluides.

DÉFINITION II.

2. *Le corps fluide* eſt celui dont les parties ſont unies, de maniere à pouvoir être ſéparées très facilement.

Remarque.

3. Cette propriété des fluides ſe reconnoît en ce qu'ils laiſſent au milieu d'eux un paſſage libre aux autres corps; que leur poids les fait tomber en gouttes; qu'ils prennent auſſi-tôt la figure des vaſes dans leſquels on les verſe, & que s'ils n'étoient retenus par ces vaſes ils s'écouleroient.

DÉFINITION III.

4. *Les corps ſolides* au contraire ſont ceux dont les parties ſont ſi adhérentes les unes aux autres,

qu'elles ne peuvent être ſéparées que difficilement.

DÉFINITION IV.

5. *Un corps ſpécifiquement plus léger* eſt celui qui ſous un même volume a moins de peſanteur qu'un autre.

DÉFINITION V.

6. *Un corps ſpécifiquement plus peſant* eſt au contraire celui qui ſous un même volume a plus de poids qu'un autre.

Remarque.

7. Si une boule de plomb occupe le même volume qu'une boule de pierre, la boule de plomb ſera plus peſante que celle de pierre : par conſéquent le plomb eſt un corps ſpécifiquement plus peſant que la pierre, & la pierre au contraire eſt un corps ſpécifiquement plus léger que le plomb.

DÉFINITION VI.

8. *La force de réſiſtance* eſt celle qui détruit, en tout ou en partie, l'action d'une autre force.

Axiome I.

9. *Les corps graves* compriment & tâchent de déplacer ceux qui ſont au-deſſous d'eux. (§. 32, Méchan.)

Axiome II.

10. Plus un corps eſt peſant, plus il comprime ceux qui ſont au-deſſous.

Axiome III.

11. Si deux ou plusieurs corps ont la même pesanteur, ils doivent comprimer également.

Axiome IV.

12. Si deux ou plusieurs corps ont la même grandeur, sans avoir la même pesanteur, celui qui a le plus de pesanteur, comprimera davantage que celui qui en a le moins.

Axiome V.

13. Si deux corps se compriment avec des forces égales, mais selon des lignes de direction opposées, il ne s'ensuivra aucun mouvement. Si l'un a plus de force que l'autre n'a de résistance, le plus foible suivra la ligne de direction du plus fort.

Lemme.

14. Si deux cylindres également grands ont cependant la hauteur & leurs bases différentes, la hauteur du premier est contenue autant de fois dans la hauteur du second, que la base de celui-ci est contenue dans la base de celui-là.

Démonstration.

Si vous multipliez les bases de deux cylindres égaux par leurs hauteurs, il en résultera le même produit (§. 197, Géom.). Si la hauteur du premier est en raison réciproque avec la hauteur du second, le produit de la base du premier par sa hauteur sera égal au produit de la base du second par sa hauteur (§. 81, Arithm.). Par conséquent si deux cylindres sont égaux, la hauteur du premier est à la hauteur du second, ce que la base de celui-ci

est à la base de celui-là. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême I.

15. Si l'on remplit d'eau deux tubes qui se communiquent, l'eau sera à hauteur égale dans l'un & dans l'autre.

Démonstration.

M. I. Fig. I.

I. CAS Si les tubes AB & CD sont à plomb sur la ligne horizontale, & que leurs diametres soient égaux, l'eau a la même gravité dans l'un & dans l'autre, si elle a la même hauteur (§. 193, Geom); par conséquent l'eau EB fait autant d'effort pour chasser l'eau BD, que FD lui oppose de résistance (§. 9, 11); ni l'une ni l'autre ne cédera sa place (§. 13). L'eau sera donc à la même hauteur dans les deux tubes. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Fig. 2.

II. CAS. Mais si la base du tube GI est quatre fois plus grande que celle du tube HK, & que l'eau descende, par exemple, d'un pouce depuis L jusqu'à O, il faut nécessairement qu'elle monte de quatre pouces dans le petit depuis M jusqu'à N (§. 14). Car supposons que dans le plus grand tube une livre en mette quatre en mouvement, il en faudra quatre pour en faire mouvoir une dans

tube R S eſt la même que celle d'un globe ſur un plan incliné : par conſéquent l'eau qui eſt dans le tube R S a autant de force que celle du tube T V, ſi l'un & l'autre ſont de même hauteur (§. 82, Méchan.). Or par les raiſons du premier & du ſecond cas, l'eau qui eſt dans le tube T V ſoutient celle du tube P Q. Elle doit donc être en équilibre dans les tubes P Q & R S, ſi la colonne eſt égale. *Troiſieme cas qu'il falloit démontrer.*

IV. Cas. Il s'enſuit de ce que nous venons de dire, que le même équilibre de l'eau doit ſe trouver dans les tubes X W & Y Z, ſi elle monte auſſi haut dans l'un que dans l'autre, quoique les tubes aient un diametre différent, & qu'ils ne faſſent point les mêmes angles avec la ligne horizontale. *Ce qu'il falloit démontrer.* Fig. 4.

Corollaire I.

16. Si donc après avoir pris la précaution d'enduire avec de la poix, ou autre matiere, tout le dedans du vaiſſeau A B, vous y inſérez un long tube par ſon fond ſupérieur C, de façon que l'eau ni l'air ne puiſſe pénétrer dans le vaiſſeau que par le tube; & qu'enſuite vous rempliſſiez d'eau le tube & le vaiſſeau, vous verrez que le peu d'eau que renferme le tube C D preſſera ſi fort le fond A E, qu'elle pourroit enlever un poids de cent livres, parceque l'effort que fait l'eau dans le tube C D eſt auſſi grand qu'il le feroit dans tout le cylindre F A. Fig. 5.

Corollaire II.

17. C'eſt pourquoi il ne faut regarder dans la preſſion des fluides que leur hauteur & la grandeur de la baſe qui réſiſte à la preſſion.

Théorême II.

Fig. 1.

18. Si l'on remplit deux tubes qui ſe communiquent, de liqueurs de différente peſanteur, la hauteur du fluide ſpécifiquement plus léger eſt à la hauteur du plus peſant, comme la gravité du plus peſant à la gravité du plus léger ſous un même volume.

Démonſtration.

Mettez, par exemple, du mercure dans le tube C D, & de l'eau dans le tube A B. Comme le mercure eſt quatorze fois plus peſant que l'eau, elle doit monter quatorze fois plus haut dans le tube A B que le mercure dans le tube C D : car ſi les tubes ſont de même grandeur, les cylindres ſont en même raiſon que leurs hauteurs (§. 210, Géom.) ; par conſéquent ſi le mercure monte quatorze fois moins haut dans le tube C D que l'eau dans le tube A B, il y aura quatorze fois plus d'eau dans le tube A B, que de mercure dans le tube C D ; par conſéquent la peſanteur de l'eau ſera égale à celle du mercure : c'eſt pourquoi comme le mercure preſſe autant vers D B que l'eau vers B D (§. 11), l'un & l'autre doivent être en équilibre (§ 13) : & comme il n'importe que les

plus de pesanteur spécifique que lui, ce corps perd autant de son poids qu'en a le fluide dont il prend la place.

Démonstration.

Supposons, par exemple, qu'on plonge dans l'eau un pied cubique de plomb; le pied cubique d'eau qu'il chasse étoit soutenu par celle qui l'environnoit; or si le plomb prend sa place, il faut que l'eau qui l'environne soutienne une partie du poids égale à celle de l'eau dont il a pris la place; par conséquent le plomb perd autant de son poids qu'en a un pied cubique d'eau. *Ce que j'avois à démontrer.*

Corollaire I.

20. Comme un pied cubique de fer perd autant qu'un pied cubique de plomb, quoique celui-ci soit plus pesant que l'autre, il est évident que le fer, & tout autre corps qui a plus de légéreté spécifique, perd dans un fluide, par exemple, dans l'eau, une plus grande partie de son poids que le plomb ou tout autre corps spécifiquement plus pesant.

Corollaire II.

21. Quoiqu'un corps qui a plus de pesanteur spécifique qu'un autre soit avec lui en équilibre dans l'air, le plomb, par exemple, avec le fer, ils ne le seront pourtant pas dans l'eau ou dans tout autre fluide; mais le plomb gravitera davantage.

Corollaire III.

22. Comme un pied cubique de plomb plongé dans l'eau perd autant de son poids qu'en a un pied cubique d'eau, & que dans le vin au contraire

il n'en perd qu'autant qu'en a un pied cubique de vin, le plomb perd plus de ſon poids dans l'eau que dans le vin ; & par conſéquent tout corps perd plus de ſon poids dans un fluide qui a plus de peſanteur ſpécifique, que dans celui qui en a moins.

Corollaire IV.

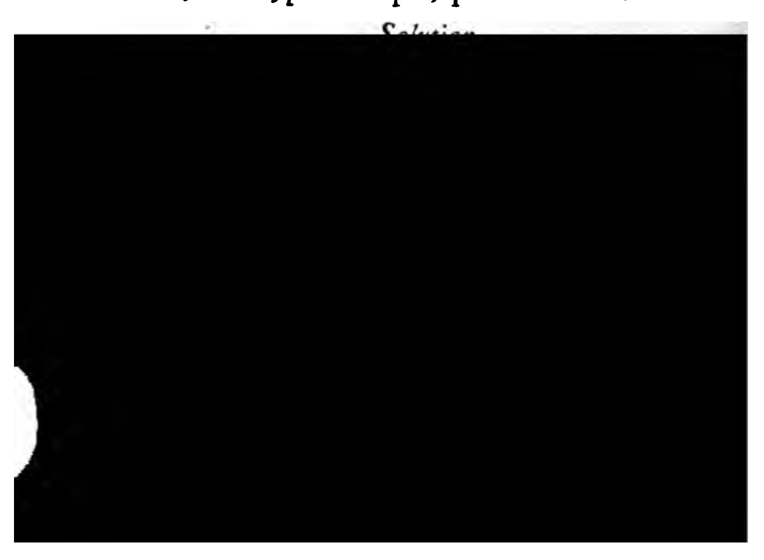
23. De là vient que deux livres de plomb, dont on plonge l'une dans l'eau & l'autre dans le vin, ne ſont point en équilibre : & en général deux corps de même eſpece & de même grandenr ne ſont point en équilibre ſi on les plonge dans des fluides de différente gravité.

Corollaire V.

24. La peſanteur d'un fluide eſt à la peſanteur d'un corps de même grandeur, comme la partie du poids qu'il perd à ſon poids entier. Par exemple, la peſanteur de l'eau eſt à la peſanteur du fer, comme la partie du poids qu'il perd dans l'eau à ſon poids entier.

Problême I.

25. Trouver le poids de quelque fluide que ce ſoit, du vin, par exemple, qui eſt dans un tonneau.



regle de trois (§. 85, Arithm.) le poids de tout le fluide.

EXEMPLE.

Un pied cubique de plomb, selon la mesure de Paris, perd dans l'eau 72 livres. On demande le poids de 345 pieds cubiques d'eau.

1' — 72 liv. — 345
72
690
2415

Le poids de l'eau est de 24840 liv.

Corollaire.

26. Ayant déterminé le poids du fluide, vous pourrez pareillement trouver son volume. Vous demandez, par exemple, quel espace occupent 325000 liv. d'eau.

72 liv. — 1' — 325000 liv.
1
325000

126
32227
47084
328000 ($4513'\frac{8}{9}$ le volume d'eau,
72222
777

Problême II.

27. Trouver en quelle raison est la pesanteur d'un fluide avec la pesanteur d'un autre fluide sous un même volume.

Solution.

1°. Examinez combien un pouce cubique de

pierre perd de son poids dans l'eau, vous connoîtrez par-là le poids d'un pouce cubique d'eau (§. 19).

2°. Examinez également combien le même pouce cubique de pierre perd de son poids dans un autre fluide, dans de l'huile, par exemple; vous connoîtrez de même le poids d'un pouce cubique d'huile (§. 19). Ainsi la pesanteur de l'eau est à la pesanteur de l'huile, comme le poids que perd un pouce cubique de pierre dans l'eau, au poids qu'il perd dans l'huile.

Par exemple, un pied cubique de pierre perd 72 livres dans l'eau & *66* dans l'huile; la pesanteur de l'eau est donc à la pesanteur de l'huile, comme 72 liv. sont à *66*, ou comme 12 sont avec 11. (§. 59, Arithm.)

Problême III.

28. Connoissant le poids d'un corps composé de deux matieres, & la quantité qu'il perd de son poids dans un fluide, trouver le poids de l'une & de l'autre matiere en particulier.

Solution.

1°. Prenez séparément une livre, ou telle autre quantité de chaque matiere, & par l'expérience que vous en ferez, déterminez ce qu'elle perd de

4°. Retranchez encore le poids du corps qui a le plus de gravité spécifique, de la diminution du poids qu'a le corps mixte, pour connoître de combien la perte du poids que ce corps mixte a faite, est plus grande que celle du corps spécifiquement plus pesant.

5°. Que si vous cherchez un quatrieme nombre proportionnel à l'excès du premier, à celui du second & au poids du corps mixte (§. 85, Arith.), ce quatrieme nombre proportionnel sera le poids du corps mixte spécifiquement plus léger, lequel étant ôté du poids du corps mixte, il restera le poids du volume qui a le plus de pesanteur spécifique, & par-là vous trouverez ce que vous demandez.

EXEMPLE.

Une masse composée d'étain & de plomb, du poids de 120 liv. en perd 14 quand on la plonge dans l'eau. On demande quel est le poids du plomb, quel est celui de l'étain. L'expérience fait connoître qu'une masse d'étain de 37 liv. en perd cinq étant plongée dans l'eau, & qu'une masse de plomb de 23 liv. en perd 2 étant plongée dans le même fluide. Cela connu, vous ferez ainsi votre calcul:

37 — 5 — 120
5
600
37

23 — 2 — 120
2
240
23

$$\frac{600}{37} - \frac{240}{23} = \frac{13800 - 8880}{851} = \frac{4920}{851}$$

$$14 - \frac{8880}{851} = \frac{11914 - 8880}{851} = \frac{3034}{851}$$

4920 — 3034 — 120

41 1 (120

1

26

3034 (74 livres le poids spécifiquement plus léger.

411 | 120 poids du mixte.

4 | 46 le poids spécifiquement plus pesant.

Remarque.

29. On peut résoudre de la même façon le problême qui donna naissance à l'hydrostatique, & qu'Archimede explique le premier ; savoir combien l'ouvrier avoit mêlé d'argent avec l'or dont il avoit fait la couronne du Roi de Syracuse, qui pesoit 18 livres ; car comme 18 liv. d'or en perdent une dans l'eau, & 18 liv. d'argent $1\frac{1}{2}$, il s'apperçut que la couronne en perdit $\frac{1}{3}$, & il décou-

Démonſtration.

Ce corps plongé dans un fluide perd une partie de ſon poids égale au poids du fluide dont il occupe la place (§. 19); par conſéquent il ne peut deſcendre qu'avec la force qui lui reſte, & qui eſt égale à la différence de ſon poids & de celui du fluide de même volume.

Corollaire I.

31. La force qui ſoutient un corps dans l'eau eſt égale à l'excès de gravité de ce corps au-deſſus de la gravité d'un égal volume d'eau. Trente-ſept livres d'étain, par exemple, plongées dans l'eau perdent cinq livres de leur poids; donc trente-deux livres d'eau peuvent ſoutenir trente-ſept livres d'étain plongé dans ce fluide.

Remarque.

32. Connoiſſant la grandeur & la peſanteur d'un ſolide plongé dans l'eau, on peut déterminer quelle force il faudroit employer pour l'élever au-deſſus de ce fluide.

Suppoſons que le poids d'une maſſe plongée eſt de 104500 liv. la grandeur de 340 pieds cubiques; le pied cubique d'eau de 72 liv.

```
   340
    72
  ----
   680
  238
  -----
  24480 liv. le poids d'eau égal à la maſſe plongée.
 104500 le poids de la maſſe.
 ------
  80020 la force capable de ſoutenir la maſſe.
```

Corollaire II.

33. C'eſt pourquoi le poids d'un corps ſolide excédant davantage le poids d'un fluide qui a plus de peſanteur ſpécifique & dont il a pris la place, qu'il ne feroit dans un fluide qui a moins de peſanteur, il eſt néceſſaire qu'il s'enfonce avec plus de vîteſſe dans celui-ci que dans celui-là. Par exemple, une boule de plomb s'enfonce plus vîte dans le vin que dans l'eau.

Théorême V.

34. Si un corps eſt plongé dans un fluide qui a plus de peſanteur ſpécifique que lui, ce corps s'enfoncera dans ce fluide, par exemple, dans l'eau, juſqu'à ce que l'eau qui rempliroit l'eſpace occupé par la partie du corps plongé, ſoit en équilibre avec tout le corps entier.

Démonſtration.

Suppoſons que ce corps eſt un cylindre de bois; concevons le fluide comme compoſé de pluſieurs cylindres qui peſent tous également, parcequ'ils ont tous une hauteur égale (§. 15). Or ſi le cylindre de bois eſt plongé dans l'eau, le cylindre d'eau qui eſt ſous lui doit plus preſſer que les col-

été chassées, parcequ'actuellement comme auparavant elles pesent autant que lui. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

35. Si vous plongez le même corps dans des fluides de différente pesanteur spécifique, il doit s'enfoncer plus avant dans celui qui est moins pesant que dans celui qui l'est davantage, par exemple, plus dans le vin que dans l'eau, parceque le vin a moins de pesanteur spécifique que l'eau, & parceque la gravité de ce corps approche moins de celle de l'eau que de celle du vin.

Corollaire II.

36. Un corps s'enfonce plus avant dans un fluide à proportion qu'il approche davantage de la gravité de ce fluide. Par exemple, un morceau de bois qui a plus de pesanteur spécifique qu'un autre, doit s'enfoncer davantage que celui qui en a moins.

Corollaire III.

37. Si ce corps a la même pesanteur spécifique que le fluide, de façon que, par exemple, un pied cubique de ce corps pese autant qu'un pied cubique d'eau, tout le corps s'enfonce & demeure en quelque lieu du fluide qu'on le mette.

Corollaire IV.

38. S'il n'y a que la quatrieme partie de ce corps qui soit plongée, la quatrieme partie d'autant d'eau pese autant que le corps tout entier : c'est pourquoi si vous prenez quatre parties d'eau, c'est-à-dire, autant qu'il en tiendroit dans l'espace que le corps occupe, leur poids est quatre fois plus

grand que celui du corps ; par conséquent la pesanteur du corps est à la pesanteur du fluide de même volume, comme la grandeur de la partie plongée à la grandeur entiere de tout le corps.

Corollaire V.

39. Il s'ensuit encore de là qu'un corps spécifiquement plus léger qu'un fluide ne s'élevera point du fond du vase où on l'aura mis, si un fluide spécifiquement plus pesant, qu'on y auroit versé, ne s'éleve lui-même au-dessus de la partie du corps qui se trouve plongée, pendant qu'il nage dans le vase plein de ce fluide.

Problême IV.

40. Connoissant la pesanteur d'un pied cubique d'eau & la grandeur de la partie du solide qui est plongée, trouver le poids de tout le corps.

Solution.

Comme le poids d'un corps solide est égal au poids de l'eau qui occupe le même espace que la partie plongée (§. 34), dites : La partie plongée d'un solide est au poids du solide entier, comme un pied cubique d'eau à sa pesanteur connue : ce que vous trouverez par la regle de trois. (§. 85,

EXEMPLE.

Le pied cubique d'eau est de 72 livres : la partie du corps qui est plongée est de 740 pieds cubiques.

1 — 72 liv. — 740'

```
            740'
             72
           ----
           1480
          518
          -----
          53280 l. le poids de tout le corps.
```

Problème V.

41. Connoissant la gravité d'un pied cubique d'eau & celle du corps solide, trouver la grandeur de la partie qui doit être plongée.

Solution.

Le poids du corps donné étant à la grandeur de la partie qui doit être plongée, comme la pesanteur d'un pied cubique d'eau est à l'égard de la grandeur du même pied cubique (§. 34), vous trouverez encore par la regle de trois (§. 85, Arith.) la grandeur que vous cherchez de la partie qui doit être plongée.

EXEMPLE.

Le pied cubique d'eau est de 72 liv. la pesanteur du corps de 53280 liv.

72 liv. — 1' — 53280 liv.

```
                 1
              -----
 2            53280
 48
 53280 (740' la grandeur de la partie qui doit
 7222         être plongée.
 77
```

Remarque.

42. La résolution de ce Problême vous fera trouver la quantité du poids qu'un vaisseau peut porter.

Problême VI.

43. Connoissant la grandeur & la pesanteur d'un solide, par exemple, d'un morceau de bois, & la pesanteur d'un fluide spécifiquement plus pesant, par exemple, d'un pied cubique d'eau, trouver la force qui peut retenir ce corps au fond du fluide.

Solution.

Il est évident (§. 34) que cette force doit égaler l'excès du poids de l'eau qui occupe la même place que le solide, au-dessus du poids de ce solide.

1°. Cherchez donc par la regle de trois (§. 85, Arithm.) la pesanteur de l'eau qui occupe la même place que tout le solide, par la pesanteur donnée d'un pied cubique d'eau, & la grandeur du solide que vous connoissez aussi.

2°. Soustrayez ensuite le poids du solide, le reste sera la puissance que vous cherchez.

EXEMPLE.

Le pied cubique d'eau pese 72 liv. le corps solide

Corollaire.

44. Comme le corps eſt pouſſé en haut par la même force qui pourroit le retenir au fond du fluide, on peut trouver par le même problême quelle eſt la force qui pouſſe en haut un corps plus léger que le fluide dans lequel il eſt. Elle eſt la même que dans l'exemple précédent, de 476 liv.

Théorême VI.

45. La puiſſance néceſſaire pour enfoncer dans l'eau le vaſe vuide A B juſqu'à la ligne A C, ligne juſqu'à laquelle, s'il étoit rempli, il s'enfonçeroit; cette puiſſance eſt égale à celle qui pourroit ſoutenir en l'air autant d'eau qu'il en tiendroit dans le vaſe juſqu'à la ligne la ligne A C. Fig. 6.

Démonſtration.

La puiſſance ou la force qui ſoutient l'eau en l'air eſt égale à ſa peſanteur ; or la force qui enfonce dans l'eau le vaſe vuide juſqu'à la ligne AC, peſe autant que l'eau qui le remplit, puiſqu'elle eſt ſuppoſée enfoncer le vaſe juſqu'à cette ligne ; donc cette force égale celle qui pourroit ſoutenir l'eau contenue dans le vaſe (§. 22, Arithm.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême VII.

46. La force qui eſt néceſſaire pour retenir un corps qui a moins de peſanteur, ſous un fluide qui en a d'avantage, & le poids que ce corps perd, augmentent la peſanteur du fluide, & peſent avec lui.

Démonſtration.

La force néceſſaire pour retenir un corps qui a

moins de pesanteur sous un fluide qui en a davantage, gravite sur le fluide, de sorte que c'est comme si une masse de même poids lui étoit ajoutée. Or cette masse ne faisant qu'un corps grave avec le fluide, peseroit avec lui; donc une force égale à cette masse doit peser avec le fluide. Voilà le premier article.

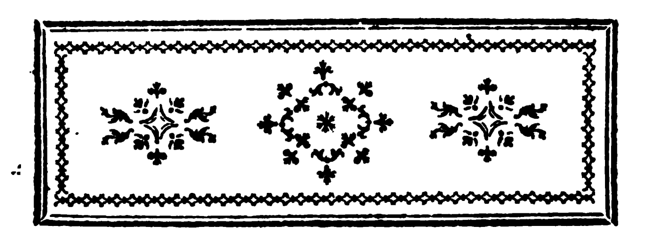
Quant au second, la partie du poids que perd dans un fluide plus léger un corps qui a plus de pesanteur, est soutenue par ce fluide, comme nous l'avons démontré dans le Théorême 5, (§. 19). Or cette partie du poids jointe avec l'eau qui est dessus & dessous dans le même cylindre, pesant autant que l'eau qui l'environne, il est nécessaire qu'elle comprime le fond du vaisseau avec cette eau, & par conséquent elle gravite avec elle. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

47. On prouve aisément par l'expérience ce que nous avons démontré jusqu'ici. Nous devons regarder ces expériences comme des examens qui nous prouvent la bonté, la justesse & la vérité de nos raisonnements.

Fin de l'Hydrostatique.





ÉLÉMENTS D'AIROMÉTRIE.

DÉFINITION. I.

1. L'AIROMÉTRIE est la ſcience de meſurer l'air, ou la ſcience qui nous apprend à connoître les différents degrés de peſanteur, de reſſort, de compreſſion, de dilatation, &c. de l'air.

DÉFINITION II.

2. *Meſurer*, c'eſt prendre pour une unité une certaine quantité ou grandeur d'un corps, & chercher le rapport que les autres grandeurs ou quantités de même eſpece ont avec celle qu'on ne conſidere que comme une unité.

Remarque.

3. Par exemple, je veux meſurer une piece d'étoffe, je prends une grandeur déterminée que j'appelle aune, & que je conſidere comme une unité : j'examine combien de fois la longueur de cette aune ſe trouve dans la longueur de l'étoffe. Veux-je meſurer la chaleur de l'air ? je prends pareillement un certain degré de chaleur pour une unité,

& je cherche ensuite le rapport que la chaleur entiere de l'air a avec ce degré déterminé ; c'est-à-dire que j'examine combien de fois ce degré déterminé se trouve dans la chaleur entiere que je veux mesurer. (§. 52, Arithm.)

Corollaire.

Comme sous le terme de quantité est compris tout ce qui peut être augmenté ou diminué, on peut mesurer tout ce qu'on peut concevoir dans l'air, susceptible de dilatation ou de raréfaction.

DÉFINITION III.

5. Par *l'air* j'entends un corps fluide répandu autour de la terre, qui occupe les espaces que les autres corps abandonnent & qui nous paroissent vuides, à moins qu'un autre corps plus fort ne l'en empêche.

Remarque.

6. Nous ne donnons ici à l'air que la propriété essentielle qui peut le faire connoître.

Corollaire.

7. Si l'on pousse la main avec célérité dans l'espace qui nous paroît vuide, & vers le visage, on sent que quelque corps le touche légérement, quoique la main ne le touche pas. Il faut donc que ces espaces soient remplis d'une certaine matiere très subtile qu'on ne voit point, & dont les parties ne sont pas assez adhérentes les unes aux autres pour empêcher le mouvement des corps. Il y a donc un fluide très subtil qui remplit sur la terre

les espaces que les autres corps abandonnent (§. 2, Hydrost.), c'est-à-dire que l'air existe. (§. 5.)

DÉFINITION IV.

8. *Un corps est comprimé* lorsque la matiere dont il est composé, est resserrée dans un plus petit espace que celui qu'elle occupoit.

DÉFINITION V.

9. *Un corps se dilate* lorsque sa matiere remplit un plus grand espace qu'auparavant.

Remarque.

10. La matiere propre d'un corps est celle qui pese avec lui, qui est en mouvement avec lui, & qui dans ce mouvement va heurter contre les autres corps. Pour la matiere qui passe librement à travers un corps, nous l'appellons *matiere hétérogene* ou *étrangere.*

Problême I.

11. Faire une *Pompe pneumatique*, c'est-à-dire un instrument par le moyen duquel on puisse tirer tout l'air d'un vaisseau.

Solution.

1°. Faites un cylindre creux de laiton AB, & dont la surface intérieure soit extrêmement unie, afin que le *Piston* DE la frotte exactement de toutes parts, & que la moindre partie d'air ne puisse s'échapper. Fig. 1.

2°. Le *piston* doit être composé de cercles de cuir enduits de graisse cuite de cochon, & d'huile d'olives, & renfermés entre deux autres cercles de cuivre, l'un à la partie supérieure D, & l'au-

tre à la partie inférieure E, lesquels cercles de cuivre sont retenus par une vis. Attachez ensuite au piston une lame de fer DC dentée depuis C jusqu'à D, afin que par le moyen de la manivelle NO, & d'une petite roue dentée attachée au cylindre, on puisse l'introduire & le retirer commodément. Il est bon de remarquer qu'on feroit bien de prendre à cet effet du cuir dont on fait les ceinturons des soldats, c'est-à-dire du cuir de bœuf, ou plutôt celui de cerf, étant plus souple que l'autre.

3°. Il faut souder à la base du cylidre B un petit tube BFKL, dans lequel on puisse introduire un robinet GHI au point F, afin de pouvoir ouvrir ou fermer la pompe quand on voudra. Le robinet doit être percé au milieu, pour que l'air puisse s'introduire dans la pompe après avoir passé par le petit tube LK; il doit l'être encore, mais obliquement à un de ses côtés, dans la partie supérieure, afin que l'air qui est dans la machine puisse sortir par la cavité du piston. Dans le haut est une aiguille de laiton pour fermer la cavité du robinet lorsque le cas l'exige.

4°. Enfin le tube KL doit avoir une vis au point L pour tenir fermes les vaisseaux dont on veut pomper l'air, & dont les orifices seront fermés de



ce puisse être, ne s'introduise entre le piston & la superficie intérieure du cylindre. On couvre le fond du bassin avec un cuir mouillé, parceque sans cette précaution les cloches de verre ne joindroient pas assez exactement pour empêcher l'air d'entrer. C'est pour cela qu'on garnit les tuyaux avec des cercles de cuir imbibé de suif chaud. Lorsque le piston a de la peine à entrer, il faut l'enduire d'huile d'olive, & le robinet de suif chaud.

Expérience I.

13. Si vous mettez sous une cloche de verre une vessie d'agneau toute flasque, n'ayant d'autre air que celui qui est dans les plis, & fermée avec un cordon par le col; cette vessie s'enflera à proportion de l'air que vous tirerez de la cloche. Que si vous laissez rentrer l'air par le moyen du robinet, la vessie désenflera, deviendra flasque, & reprendra son premier état.

Corollaire.

14. Comme il ne reste dans la vessie que le peu d'air qui se trouve dans les replis, il faut que cet air se dilate à mesure qu'on pompe celui qui l'entoure (§. 9), autrement la vessie ne s'enfleroit point. Et comme elle s'enfle à proportion qu'on pompe l'air qui l'environne, il est clair qu'il faut qu'il y ait dans l'air une élasticité ou vertu de dilatation; & qu'à moins qu'une puissance plus forte ne lui résiste, il aura constamment son effet.

DÉFINITION VI.

15. Nous appellerons dans la suite force élasti-

que celle qui rend l'air capable de compreſſion & de dilatation.

Corollaire.

Fig. 1. Si vous tirez le piſton DE de la machine pneumatique AB, il ſe fait dans la cavité de cette machine un eſpace vuide dans lequel l'air extérieur n'a aucune entrée. Que ſi vous ouvrez le robinet GH, l'air qui eſt ſous la cloche du baſſin PQ ſe dilate & s'introduit par le tuyau LKF dans la cavité de la machine, juſqu'à ce qu'il ſoit également condenſé par-tout. Ainſi celui qui eſt reſté dans la cloche eſt plus raréfié qu'il ne l'étoit auparavant. Si après cela vous tournez le robinet GH de façon que l'ouverture oblique, qui eſt au-deſſus, réponde à la cavité de la machine, ſi vous tirez l'aiguille de laiton, & que vous pouſſiez le piſton DE dans la pompe, l'air ſera chaſſé par le tuyau FG & par le robinet GK.

Expérience II.

Fig. 4. 17. Attachez avec du ciment à un globe creux & d'un aſſez gros volume A, un tuyau de cuivre court, armé d'un robinet & d'une vis femelle B, pour qu'on puiſſe le fermer & l'attacher à la pompe

Corollaire I.

18. Puiſque ce globe plein d'air peſe plus dans la balance que s'il étoit vuide, il eſt donc clair que l'air eſt peſant (§. 32, Méchan.)

Remarque I.

19. C'eſt en ſuivant cette méthode que Burcher de Volder a découvert qu'un pied cubique d'air peſe une once & 27 grains, ou preſque 507 grains. Voyez les queſtions académiques ſur la gravité de l'air. Theſe 48, pag. 50 & ſuiv.

Corollaire II.

20. L'air étant ſuſceptible de compreſſion, & le ſupérieur gravitant ſur l'inférieur (§. 18, Airom. & §. 9, Hydroſt.), il n'eſt pas ſurprenant que celui-là ſoit plus raréfié, & celui-ci plus condenſé.

Corollaire III.

21. Il s'enſuit de là qu'un volume d'air inférieur a plus de peſanteur ſpécifique qu'un égal volume d'air ſupérieur, puiſqu'un même eſpace contient plus de parties du premier que du ſecond.

Remarque II.

22. Il n'eſt donc point ſurprenant que les vapeurs qui montent par l'air inférieur, s'attachent à l'air ſupérieur & demeurent ſuſpendues. (§. 37, Hydroſt.)

Théorême I.

23. La vertu élaſtique de l'air eſt égale à la force qui le comprime.

Démonstration.

L'air étant moins comprimé par une force plus petite qu'il ne l'est par une plus grande, sans doute qu'il résiste à cette force ; or l'air a une vertu élastique dont la propriété est de faire effort pour se dilater autant qu'il est possible (§. 15) ; il faut donc, pour avoir cet effet, qu'il résiste par sa vertu élastique à la force qui le comprime (§. 8, Hydrost.) : & comme celle-ci ne peut rien de plus sur celle-là, il faut qu'elles soient égales (§. 13, Hydrost.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

24. Par conséquent plus l'air est comprimé, plus sa vertu élastique acquiert de force ; au contraire plus il est raréfié, plus elle est foible.

Corollaire II.

25. Si l'air est donc comprimé dans un espace deux fois plus étroit, sa vertu élastique devient plus forte du double. Si l'espace est trois fois plus étroit, elle est plus forte du triple, &c. qu'elle n'étoit auparavant.

Expérience III.

28. Si vous rempliſſez d'eau un tube dont la longueur ſurpaſſe 32 pieds du Rhin, & dont l'ouverture ſupérieure ſoit bien bouchée; & celle d'enbas fermée par un robinet; tenant après cela le tube élevé verticalement, plongez le robinet dans l'eau : ſi ayant ouvert l'orifice vous ouvrez auſſi le robinet, toute l'eau s'écoulera; mais ſi vous ouvrez ſeulement le robinet, l'orifice étant toujours bien bouché, l'eau reſtera ſuſpendue à la hauteur de 31 ou 32 pieds au-deſſus du niveau de l'eau dans laquelle le tuyau eſt plongé.

Corollaire I.

29. Puiſque l'eau ſuſpendue dans le tube comprime celle qui eſt dans le petit vaſe placé au deſſous (§. 9, Hydroſt.), & que cependant celle-ci ne lui cede pas, il faut donc qu'elle ſoit comprimée également tout à l'entour; or l'air, en s'appuyant ſur l'eau, la comprime (§. 18); par conſéquent l'air comprime la ſurface de l'eau qui environne le tube avec une force égale à celle du cylindre d'eau qui a pour baſe le cercle de cette ſurface, & 32 pieds du Rhin de hauteur. Une colonne d'air dont le diametre eſt égal au diametre du tube, & dont la hauteur s'étend depuis la ſurface de l'eau du vaſe juſqu'au haut de l'atmoſphere, ne peſe donc pas plus que la colonne d'eau de 32 pieds de hauteur.

Corollaire II.

30. Puiſque l'air tient l'eau ſuſpendue dans le tube à la hauteur de 32 pieds, & que le mercure eſt quatorze fois plus peſant que l'eau, l'air ne

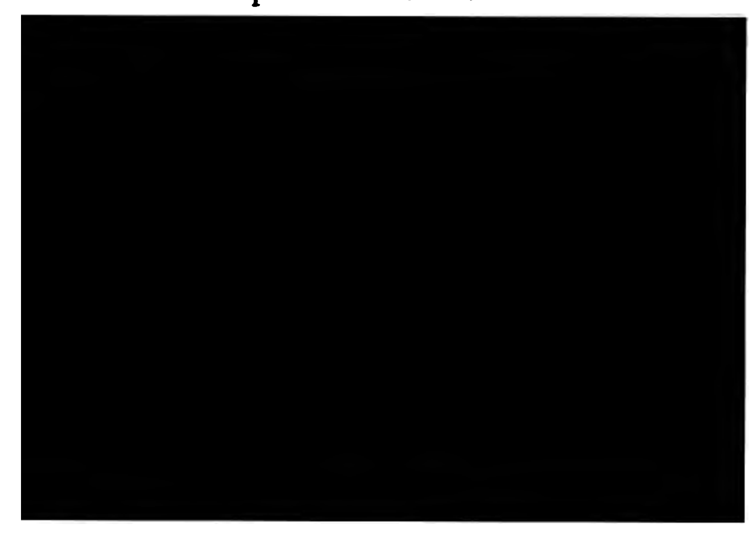
tiendra donc le mercure ſuſpendu dans le même tube qu'à la hauteur de la quatorzieme partie de 32 pieds. (§. 18, Hydroſt.)

Remarque.

Fig. 3. 31. De là vient que ſi vous rempliſſez de mercure un tube de verre A B dont l'orifice ſupérieur ſoit fermé hermétiquement, & que vous plongiez ce tube dans un vaſe plein de mercure, celui qui eſt dans le tube ne tombera pas abſolument; mais il ſera ſuſpendu à la hauteur d'environ 28 pouces. Toricelli a fait cette découverte; c'eſt pourquoi on appelle ce tube, *le Tube de Toricelli*, ou *Barometre*. Que ſi vous jettez de l'eau dans le vaſe où eſt le mercure, il montera plus haut dans le tube, parceque l'air peſe alors avec l'eau, & leur action étant réunie, elle devient plus forte: au contraire ſi vous mettez ce tube ſous une cloche de verre à grand col & dont vous pompez l'air, à meſure que l'air manquera, le mercure deſcendra.

Problême II.

32. Connoiſſant la baſe d'une colonne d'air, trouver le poids de cette colonne.



celui de la colonne d'air. (§. 85, Arithmét.)

EXEMPLE.

Soit le diametre du cercle $100'''$, l'aire sera de $7850'''$ (§. 134, Géom.)

La hauteur de la colonne d'eau de $3100'''$

785000
23550

La solidité de la colonne d'eau de $24335000'''$.

$1000''$ — 72 liv. — $24335''$
72

48670
170345

1752120

$\frac{1752120}{1000}$ ($1752\frac{3}{25}$ le poids de la colonne d'air.

Corollaire.

33. Si le diametre d'une sphere est 1, la base de la colonne d'air qui tombe sur cette sphere sera un cercle dont le diametre est 1, c'est-à-dire, le plus grand cercle d'une sphere ; par conséquent son poids est de 1752 liv. On doit remarquer que cette colonne presse également dessus & dessous. (§. 26, 27.)

Théorême II.

34. Si un vase est rempli d'air, il n'éprouve aucun effet de la pression de celui qui l'environne ; mais si on ôte cet air, l'effet qui s'ensuit répond à la force de l'air extérieur qui le comprime.

Démonstration.

Si l'air qui remplit le vase a la même densité que

celui qui l'environne, l'élasticité de l'air renfermé est égale à la force de l'air extérieur qui le comprime (§. 23) : donc l'air renfermé dans le vase oppose autant de résistance à l'air extérieur, que celui ci fait d'effort pour le comprimer ; par conséquent la pression de l'air qui environne ne se fait nullement sentir dans le vase. (§. 13, Hydrost.) *Ce qui forme la preuve du premier article.*

Si l'on a pompé l'air du vase en tout ou en partie seulement (§. 11) ; dans le premier cas, le vase ne résiste pas à la pression de l'air extérieur ; & dans le second cas, cette partie d'air qui est restée devient plus raréfiée que l'air extérieur (§. 16) ; par conséquent son élasticité n'a plus la même force, & elle devient comme celle d'un ressort détendu (§. 24). Or n'y ayant rien, ou presque rien, dans le vase qui résiste à la pression de l'air extérieur, il doit avoir son effet proportionné, ou à la force de tout l'air qui comprime, ou à l'excès qui l'emporte sur la résistance que peut faire l'air intérieur. (§. 13, Hydrost.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

35. Vous pouvez tirer de là la raison pourquoi une cloche de verre placée sur un disque de



l'air qu'ils contiennent; & ainsi de mille autres effets.

Théorême III.

36. Si on laisse un peu d'air sur le mercure dans le tube de Toricelli, ce mercure demeurera suspendu à une moindre hauteur que si le tube étoit entiérement vuide.

Démonstration.

Si l'air intérieur a la même densité que l'air extérieur, il n'est en équilibre avec lui que par la force de son élasticité (§. 23, Airom. & 13, Hydrost.). Le mercure commence donc à descendre par la force de sa propre gravité (§. 13, Hydrost.). Alors l'air renfermé se dilate (§. 14); & en se dilatant, sa vertu élastique s'affoiblit (§. 24); étant ainsi raréfié, il n'est plus en équilibre avec l'air extérieur (§. 13, Hydrost.) qui presse le mercure pour le faire remonter dans le tube; mais alors le mercure trouvant l'air intérieur qui s'y oppose, il ne peut monter à une hauteur aussi grande que s'il ne rencontroit point d'obstacle. Par conséquent il demeurera suspendu à une moindre hauteur que si le tube étoit entiérement vuide. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

37. Comme la gravité du mercure & l'élasticité de l'air sont ensemble en équilibre avec l'air extérieur, il restera donc dans le tube autant de mercure qu'il en faut pour supléer à ce qui manque à l'air intérieur, afin qu'il puisse demeurer en équilibre avec l'air extérieur.

Corollaire II.

38. Par conféquent l'élafticité de l'air renfermé eft équivalente au poids de la colonne de mercure qu'il feroit néceffaire d'ajouter pour être capable, par fon propre poids, de demeurer en équilibre avec l'air extérieur.

Théorême IV.

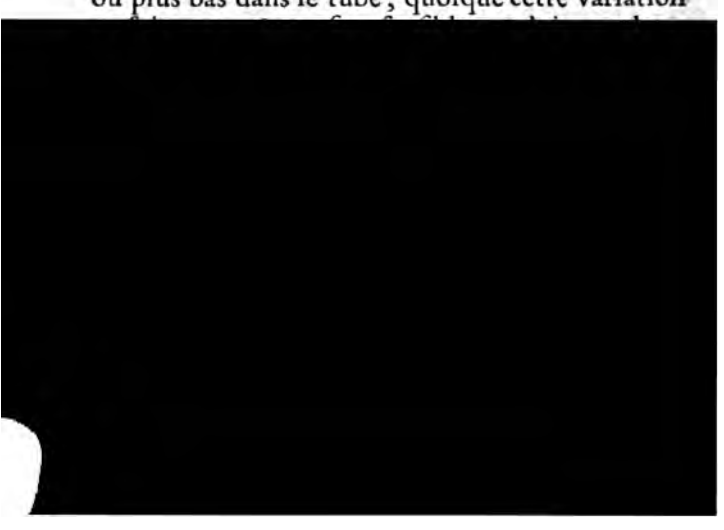
39. Si la pefanteur de l'air diminue, le mercure defcend dans le tube ; fi la gravité de l'air augmente, le mercure doit monter.

Démonftration.

Le mercure fufpendu dans le tube eft en équilibre avec la pefanteur de l'air (§. 30) ; par conféquent fi celle-ci diminue, le mercure n'étant plus tant comprimé, defcendra ; au contraire l'air ayant plus de gravité, le mercure doit néceffairement monter (§. 13, Hydroft.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

40. Le mercure étant tous les jours ou plus haut ou plus bas dans le tube, quoique cette variation



Problême III.

42. Comprimer l'air dans un vase par le moyen de la machine pneumatique.

Solution.

1°. Appliquez le vase AB à la machine. Fig. 4.

2°. Tournez du côté de la cavité de la machine le trou oblique du robinet, & ôtez l'aiguille de laiton I. Fig. 1.

3°. Tirez de la machine le piston DE : alors l'air passant par le trou du robinet & par le tuyau EB, entrera dans la machine.

4°. Tournez ensuite le robinet de façon que le tuyau FK étant ouvert, la communication entre le vase & le cylindre soit aussi ouverte, & que le point I soit bouché.

5°. Alors si vous retirez le piston DE, l'air passera de la machine dans le vase par le tuyau FKL, & il sera nécessairement comprimé (§. 8). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

43. Pour que cette expérience se fasse avec succès, il faut que le vase soit bien affermi sur la machine, parceque l'air étant comprimé, sa vertu élastique fait beaucoup d'effort (§. 24); & il pourroit arriver que le vase étant déplacé, blesseroit quelqu'un des spectateurs, particuliérement s'il est de verre.

Expérience IV.

44. Si vous présentez devant le feu une vessie remplie d'air médiocrement, & liée bien étroi-

tement pour empêcher que l'air n'en ſorte, elle ſe gonflera beaucoup, & pourra même ſe rompre avec grand bruit : mais ſi vous la retirez de devant le feu avant qu'elle ſoit rompue, elle redeviendra flaſque & molle comme auparavant.

Corollaire I.

45. Comme malgré la preſſion de l'air extérieur, la chaleur dilate celui qui eſt dans la veſſie (§. 9), il faut que la force qui occaſionne cette dilatation (§. 15) ſoit plus grande que celle de la preſſion de l'air extérieur (§. 13, Hydroſt.). Il eſt donc clair que la chaleur déplie la force élaſtique de l'air.

Corollaire II.

46. Et puiſque par l'abſence de chaleur la veſſie qui étoit tendue devient flaſque comme auparavant, il faut donc que le froid diminue la force élaſtique de l'air.

Corollaire III.

Fig. 2.

47. De là vient que ſi vous rempliſſez d'eau le tube de verre BC, laiſſant le globe AB rempli d'air, & que vous mettiez l'orifice C dans un vaſe plein d'eau EF, celle qui eſt dans le tube BC mon-

mesurer les changements du froid ou de la chaleur, & on l'a nommé *Thermometre*, ou avec plus de raison *Thermoscope*. A la place du vase on a mis le tube sur un autre globe ayant un petit trou. En effet la gravité de l'air pouvant par ses variations produire plusieurs changements (§. 29, 40), on a été obligé d'inventer différents instruments pour pouvoir connoître ces variations.

Problême IV.

49. Faire un Thermoscope par le moyen duquel on puisse connoître les changements du froid & de la chaleur de l'air.

Solution.

1°. Colorez de l'esprit de vin bien rectifié & à l'épreuve de la poudre à canon, avec des morceaux de l'écorce de la racine de curcume ou d'orcanette; la premiere racine lui donnera une couleur jaune, & la seconde une couleur rouge.

2°. Filtrez ensuite plusieurs fois cet esprit de vin par une feuille de papier gris, afin que les parties de ces racines ne soient point mêlées dans la liqueur.

3°. Remplissez le globe AB & le tube BC de cet esprit de vin filtré; & crainte d'en mettre trop peu, ou qu'en hiver tout l'esprit ne descende dans le globe, il seroit à propos de mettre le globe sur de la neige salée, ou sur de la glace polie, sur laquelle vous aurez jetté beaucoup de sel. Si c'est en été que vous vouliez faire un thermoscope, pour prévenir le même inconvénient, vous mettrez le globe dans de l'eau de fontaine bien fraîche, & dans laquelle vous aurez fait dissoudre beaucoup de nitre; vous l'y laisserez jusqu'à ce

Fig. 6.

que l'esprit de vin ne descende pas plus qu'il ne faut.

4°. Si l'esprit de vin montoit trop haut au-dessus du globe, il en faut verser un peu, & plonger insensiblement le globe dans de l'eau chaude, non pas tout d'un coup, car il se briseroit, mais on l'expose d'abord à la vapeur de l'eau bouillante, & quand il est échauffé on le plonge dans l'eau, & pour lors l'esprit de vin montera dans le tube & en chassera l'air. Lorsqu'il commencera à se former de petites ampoules dans l'esprit de vin, il faut retirer promptement le globe de l'eau, autrement l'esprit de vin se répandroit avant que vous vous en fussiez apperçu.

5°. Vous ferez ensuite rougir le bout du tube à la lumiere d'une lampe, & vous le fermerez hermétiquement au point C.

6°. Enfin vous appliquerez le tube sur une petite planche légere sur laquelle sera collée une échelle divisée en parties égales, ce qui forme les différents degrés.

Voilà le thermoscope fait.

Démonstration.

L'expérience prouve que le froid condense l'esprit de vin, & que la chaleur le raréfie. Or par le

tube, il eſt conſtant que l'air eſt conſidérablement refroidi, & qu'il eſt beaucoup plus chaud, à proportion que le même eſprit de vin eſt monté. Mais comme on ne ſauroit connoître combien, par exemple, le degré de chaleur d'aujourd'ui eſt contenu de fois dans le degré de chaleur d'un autre jour, on ne peut pas dire dans ce ſens que le thermoſcope ſerve à meſurer la chaleur (§. 2.)

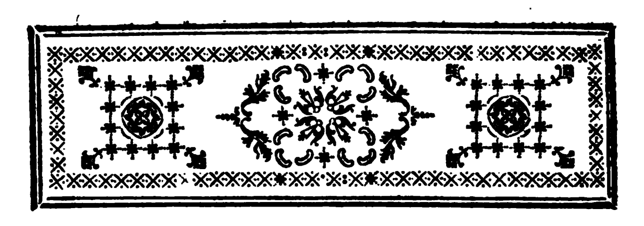
Remarque II.

51. Au reſte, quoiqu'on y remarque des changements très ſenſibles, particuliérement lorſque le tube eſt très menu, de façon qu'on le voit très notablement monter quand on applique la main ſur le globe, & qu'il deſcend auſſi-tôt qu'on l'en a retirée; on a néanmoins obſervé qu'après être beaucoup deſcendu pendant le grand froid, il reſte aſſez long-temps au même degré, quoique la température de l'air ſoit beaucoup adoucie.

Remarque III.

52. On déſigne ordinairement ſur la table des degrés de deux eſpeces, dont les uns marquent le commencement de la chaleur, & les autres le décroiſſement, ou le commencement du froid. On deſcend pour cela le thermoſcope dans une chambre baſſe ou dans une cave, & on l'y laiſſe toute la nuit. Le lendemain on marque le degré d'élévation de l'eſprit de vin dans le tube, au-deſſus duquel degré, comme tempéré, on marque toujours en montant ceux de la chaleur, & au-deſſous toujours en deſcendant les degrés du froid.

Fin de l'Airométrie.



ÉLÉMENTS D'HYDRAULIQUE.

DÉFINITION I.

1. L'HYDRAULIQUE est la ſcience qui traite du mouvement des fluides, & plus particuliérement du mouvement des eaux.

DÉFINITION II.

2. Le *Tube* ou *Tuyau* eſt un cylindre creux.

Problême I.

3. Elever les eaux par le moyen de la vis d'Archimede.

Solution.



ron 45 degrés, & vous plongerez l'exttémité B dans l'eau que vous voudrez élever. C'eſt en tournant le cylindre par le moyen de la manivelle que vous ferez votre opération.

Démonſtration.

En effet, ſi vous plongez dans l'eau l'ouverture inférieure du cylindre, l'eau par ſon propre poids doit couler en F, & tournant la vis, la même eau doit monter de F en G, de G en H, & ainſi par degrés juſqu'en A. *Ce que j'avois à démontrer.*

Remarque.

4. Par le moyen de cette machine on puiſe à la vérité beaucoup d'eau avec peu de force; mais on ne la fait pas monter bien haut. On s'en ſert fort communément pour deſſécher les marais.

Problême II.

5. Faire un chapelet pour faire monter l'eau.

Solution.

1°. Plantez dans l'eau un tuyau de bois de la hauteur que vous voulez élever l'eau. Pl. I. Fig. 2.

2°. Placez les deux cylindres GH & ED, celui-ci au fond de l'eau, & celui-là au-deſſus du tuyau. Ces deux cylindres doivent être attachés à deux aiſſieux de fer autour deſquels ils puiſſent tourner.

3°. Faites enfin paſſer autour des deux cylindres & en dedans du tuyau une corde ou une chaîne où ſeront attachés des globes de cuir de groſſeur à pouvoir remplir la cavité du tuyau. Si l'on fait

tourner le cylindre GH, l'eau montera jusques en L.

Démonstration.

Le tuyau étant ouvert au point B, pour donner entrée au chapelet, l'eau y entre & monte à la hauteur de celle qui l'environne (§. 15, Hydrost.). Or si vous faites tourner le cylindre GH, celui qui est au fond de l'eau ED doit tourner pareillement, & les globes du chapelet doivent entrer dans le tuyau & en fermer l'issue à l'eau qui y est; ils la poussent en haut: par conséquent en montant eux-mêmes, ils la font monter & la poussent jusques en L. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême III.

6. Faire monter l'eau par le moyen de petits seaux attachés à une chaîne.

Solution.

Fig. 3. 1°. Placez horizontalement au fond de l'eau un cylindre ou prisme exagone MN qui puisse tourner autour d'un aissieu de fer.

2°. Posez au lieu jusqu'où vous devez faire monter l'eau un pareil cylindre ou prisme OP pa-

Remarque.

7. Il en coute beaucoup pour l'entretien de la premiere machine, parceque les globes de cuir se gâtent facilement. Elle est d'ailleurs fort incommode en hiver, parceque les chaînes se brisent; & si l'on fait usage de cordes, elles se rompent encore plus aisément. Ce n'est pas le tout, il faut beaucoup de force pour entretenir cette machine en mouvement pendant le temps nécessaire à l'effet qu'on se propose, parcequ'il s'y fait un grand frottement des parties dont la machine est composée.

Problême IV.

8. Faire monter l'eau par le moyen du tympan.

Solution.

1°. Construisez un tympan ou tambour avec des jantes & des rayons.

2°. Placez entre les doubles rayons des petits coffrets ou boîtes, bien fermés au-dessus, & percés de petits trous dans l'autre côté A, afin que l'eau puisse y entrer. Fig. 4.

3°. Affermissez & clouez parfaitement par un côté le fond de ces boîtes sur les jantes, & vous le laisserez avancer un peu sur l'autre côté, pour pouvoir y laisser un trou quarré par lequel l'eau puisse s'écouler. Si l'on suspend cette roue sur l'eau, de façon qu'une partie de sa circonférence y soit plongée, & qu'on la mette ensuite en mouvement, les seaux se rempliront en passant dans l'eau, & se vuideront quand ils auront passé le haut de la machine.

Nous ne pouvons point parler dans cet abrégé de tous les tympans dont on ſe ſert pour puiſer l'eau. Il y en a un grand nombre que nous paſſons ſous ſilence.

Problême V.

9. Faire une *pompe aſpirante*, par le moyen de laquelle on puiſſe élever en haut l'eau d'un puits ou autre lieu bas & profond.

Solution.

Fig. 5.

1°. Plantez perpendiculairement dans l'eau un tuyau du bois A B C D.

2°. Mettez au bas de ce tuyau D C une *ſoupape* I qui ne puiſſe s'ouvrir que par le haut.

3°. Attachez à la verge de fer E L le piſton creux L K, qui doit être aſſez gros pour remplir exactement le dedans du corps du tuyau, en ſorte que l'eau ne puiſſe point paſſer entre deux.

4°. Faites une autre ſoupape au-deſſus en L. Si vous hauſſez & baiſſez le piſton dans le tuyau, l'eau montera juſqu'au haut du tuyau.

Démonſtration.

En hauſſant le piſton il laiſſe un eſpace vuide

Remarque.

10. Les *soupapes* les plus simples sont rondes & faites de cuir, on les attache par leurs anses à l'ouverture du piston. On en fait encore de cuivre couvertes d'un cuir mince,& mobiles par le moyen d'une charniere D : mais pour qu'elles se ferment plus surement, on met un ressort au point G. Fig. 6 & 7

Problême VII.

11. Faire une pompe foulante qui pousse l'eau bien haut.

Solution.

1°. Faites deux cylindres de laiton ABCD au fond desquels DC vous mettrez des soupapes. Fig. 8.

2°. Soudez à chacun un tuyau garni de soupapes en H & I qui s'ouvrent en haut.

3°. Mettez dans l'un & dans l'autre un piston K qui en remplisse exactement la cavité, pour que l'eau ne puisse passer entre deux.

Démonstration.

Quand on hausse le piston, la soupape qui est au fond s'ouvre, & l'air extérieur pousse l'eau dans le cylindre (§. 29, Airom.) : mais lorsqu'on baisse le piston, la soupape L se referme, & l'eau est chassée par le tuyau qui est à côté ; elle ouvre les soupapes I H, & monte plus haut par le tuyau N.

Remarque I.

12. On peut faire encore une soupape de cette façon. On fait par le moyen du tour un trou A, Fig. 9.

en forme de cône tronqué au bas du cylindre, & l'on y place un cône tronqué de laiton travaillé au tour, & armé d'un clou ou cheville D qui l'empêche de tourner. Ou bien on perce un trou hémisphérique où l'on met un globe de laiton qui le remplisse exactement.

Remarque II.

13. Pour faire une pompe d'où l'eau coule sans cesse & avec vîtesse, on ajuste deux cylindres avec leurs pistons de maniere que l'un monte quand l'autre baisse; & par ce moyen l'eau monte sans interruption. On se sert de cette machine pour éteindre le feu dans les incendies. & pour les autres machines qui regardent les eaux.

DÉFINITION III.

14. Par *les ouvrages à eau* nous entendons une machine par le moyen de laquelle on fait couler l'eau dans les lieux voisins, par exemple, dans toutes les fontaines d'une ville, comme la Samaritaine à Paris.

Problême VII.

15. Faire un ouvrage à eau, ou un réservoir pour la distribution des eaux.

ou des petits seaux attachés à des chaînes (§. 6), ou du tympan (§. 8), ou des pompes (§. 9, 11), lesquelles machines vous appliquerez par les puissances animées ou inanimées, selon les regles de la Méchanique que nous avons données dans les *Eléments de Méchanique*, §. 109, 110, 120, & dans les suivants.

3°. Il faut ramasser l'eau dans un réservoir de plomb ou de cuivre, au fond duquel il y ait des tuyaux par lesquels elle puisse descendre.

4°. Pour que l'eau ne monte point au-dessus des bords du réservoir, il faut mettre un ou deux tuyaux presque au niveau des bords, & elle s'écoulera par les tuyaux dans le fleuve d'où on la puise.

5°. Ces tuyaux verticaux doivent être adaptés à d'autres tuyaux horizontaux ou inclinés, cachés sous la terre, & qui viennent jusqu'aux endroits où l'on veut conduire les eaux.

6°. L'eau étant enfin parvenue à l'endroit où on veut la faire couler, on doit élever des tuyaux verticaux sur les horizontaux, avec lesquels ils doivent avoir une communication; par ce moyen l'eau montera dans ces tuyaux (§. 15, Hydrost.), & vous aurez perfectionné l'ouvrage à eau. (§. 14.) *Ce qu'il falloit démontrer*

Remarque I.

16. On devroit avoir dans les maisons des canaux grands comme des puits, & mettre dans les canaux horizontaux des pistons qu'on pût ouvrir ou fermer par le moyen d'une verge de fer. On pourroit ainsi faire couler les eaux ou en arrêter le cours. Il faut avoir soin en hiver de couvrir ces tuyaux de fumier ou de paille, pour que l'eau ne se gele point.

Corollaire.

17. Comme l'expérience nous apprend que l'eau monte presque à la même hauteur d'où elle est descendue, on pourra faire des fontaines jaillissantes en élevant les eaux par la machine que nous avons décrite, & la conduisant par des canaux de cuivre ou de plomb jusqu'à la fontaine d'où elles doivent jaillir.

Remarque II.

18. Selon les principes de l'Hydrostatique (§. 15, Hydrostat.), l'eau devroit remonter à la même hauteur précisément d'où elle étoit tombée ; mais l'expérience est contraire, & nous fait voir qu'elle monte moins haut : si même le canal est trop grand à raison de la force qui comprime, elle ne jaillira point du tout & ne fera que couler. Nous ne chercherons point ici les raisons d'une telle expérience.

Problême VIII.

19. Construire, pour l'agrément, des fontaines jaillissantes qui représentent diverses figures.



& de rapidité, on peut mettre une boule creuſe & fort légere de cuivre doré ſur le jet qui la ſoutiendra perpendiculairement comme ſuſpendue en l'air & dans un mouvement continuel, pourvu qu'elle ne ſoit point trop expoſée au vent: on peut encore placer un entonnoir à l'ouverture du tuyau, afin que ſi cette boule venoit à tomber, l'eau puiſſe la faire remonter: c'eſt ainſi que l'eau jouera à la paume (pour ainſi dire) avec la boule.

2°. Si vous voulez faire jaillir l'eau de tous les côtés, il faut ſe ſervir de pluſieurs petits tuyaux, que vous placerez les uns verticalement, les autres horizontalement, & les autres formeront tel angle que vous voudrez. Vous pourrez encore mettre au bout du tuyau un ajutage fait comme un hémiſphere ou comme un cône fermé à ſa partie ſupérieure, ou un cylindre percé de pluſieurs petites ouvertures: par le moyen de ces machines l'eau doit ſe répandre de tous les côtés en forme de petits filets.

3°. On peut repréſenter l'arc-en-ciel en formant cet ajutage de façon que l'eau en retombe toute en petites gouttes; car pour lors ſi on ſe place entre le ſoleil & la fontaine, les rayons du ſoleil frappant ſur cette eſpece de pluie, feront appercevoir les couleurs de l'arc-en-ciel. Pour réuſſir à faire tomber l'eau en petites gouttes, il faut la faire jaillir par une infinité de très petits trous, ou par un ſeul tout raboteux, ou la faire tomber ſur quelque hémiſphere ou toit rond, d'où elle puiſſe ſe répandre de tous les côtés.

4°. Vous pourrez enfin former une nappe d'eau, en la faiſant paſſer par une fente étroite & polie.

On trouve dans l'*Architecture curieuſe* de Boëcler pluſieurs autres manieres d'orner les fontaines.

Problême IX.

20. Faire un vaſe propre à arroſer les jardins.

Solution.

Pl. II. Fig. 10. 1°. Faites un vaſe ſphérique HB, ou de telle autre figure que vous voudrez, pourvu qu'il ait un cou un peu étroit HE, & que le fond de l'hémiſphere ſoit percé de pluſieurs petits trous en DB.

2°. Soudez au col du vaſe un tuyau E qu'on puiſſe boucher avec le pouce. Je dis que ſi vous plongez ce vaſe dans l'eau, elle entrera par les petits trous; & ſi vous le retirez de l'eau, & que vous bouchiez le petit tuyau avec le pouce, il n'en ſortira pas une ſeule goutte; mais enfin ſi vous retirez le pouce, l'eau s'écoulera comme une roſée par les petites ouvertures, & par conſéquent cette machine eſt très utile pour arroſer les jardins.

Démonſtration.

Si vous plongez le vaſe dans l'eau juſqu'au tuyau ouvert en E, il ſe remplira par les petits trous juſqu'à ce que l'eau qui y eſt entrée ſoit au niveau de celle qui l'environne (§. 15, Hydroſt.): mais ſi mettant le pouce ſur l'ouverture E vous re-

par l'ouverture du vaſe étant égale à la réſiſtance de l'air qui preſſe au fond (§. 15, Hydroſt.), le poids de l'eau l'emportera ſur la réſiſtance, par conſéquent l'eau s'écoulera par le fond du vaſe. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême X.

21. Faire un ſiphon, c'eſt-à-dire, une machine par le moyen de laquelle on puiſſe vuider la liqueur d'un vaſe.

Solution.

Fig. 11.

Faites un vaſe FE dont le milieu ABCD ait la figure d'un cylindre, & dont les extrémités AFB & CED aient celle d'un cône tronqué. Que les ouvertures F & E ne ſoient pas plus grandes qu'il le faut pour être bouchées avec le doigt.

Je dis que ſi vous plongez ce vaſe dans une liqueur il s'en remplira, quoique l'orifice ſupérieur ſoit beaucoup au-deſſus ; & que mettant le doigt ſur l'orifice F, & retirant ce vaſe, la liqueur ne coulera point, mais que ſi vous retirez le doigt elle ſe répandra entiérement.

Démonſtration.

C'eſt la même que celle du problême précédent.

Théorême I.

Fig. 12.

22. Si vous plongez dans une liqueur la branche la plus courte d'un tuyau recourbé, & que vous ſuciez l'air par l'ouverture C, la liqueur montera dans la branche qui trempe dans le vaſe, elle coulera autant de temps par le tuyau BC

que l'ouverture A y sera plongée, & que la liqueur sera à une plus grande hauteur que l'ouverture C.

Démonstration.

Si vous sucez l'air, le siphon sera vuide; ainsi l'air extérieur pressant l'eau qui est dans le vase (§. 18, Airom.), & ne trouvant aucune résistance dans le siphon, il la fera monter dans la branche AB, d'où par sa propre gravité elle descendra par la branche BC; & comme l'air presse autant en A qu'en C, & que l'eau au contraire qui est dans la branche BC presse plus vers C que celle qui est dans la branche AB ne presse vers A, parceque la perpendiculaire de celle-là est plus grande que la perpendiculaire de celle-ci (§. 17, Hydrost.), il faut nécessairement que l'eau coule par le bout C jusqu'à ce que l'air puisse entrer par le bout A dans le siphon, & surmonter l'inégalité de la pression. (§. 13, Hydrost.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque I.

23. Il importe peu que l'une ou l'autre branche du siphon, ou même que toutes les deux branches soient recourbées, pourvu que l'orifice soit plus bas que la superficie de l'eau qu'on veut puiser.

dre jusqu'à ce que l'air puisse pénétrer par l'orifice R dans le grand tuyau. C'est pourquoi on appelle ce siphon *Diabetes*.

Problême XI.

25. Faire une fontaine intermittente, c'est-à-dire, une fontaine qui coule à diverses reprises.

Solution.

1°. Faites passer dans un vase rond un tuyau FHM, que vous souderez au milieu du fond de ce vase, & dont les deux extrémités étant ouvertes, la premiere ira presque toucher le couvercle. Fig. 14.

2°. Soudez l'orifice inférieur au bassin CD d'où l'eau puisse couler par un petit trou fait au milieu dans un vase que vous placerez au-dessous. Faites aussi un petit trou au tuyau FHM fort près du bassin.

3°. Qu'il y ait une ouverture garnie d'une vis au couvercle du vase, par où vous puissiez faire entrer l'eau, & que le fond du vase soit percé de plusieurs trous qui donnent passage à l'eau.

Si vous remplissez le vase supérieur, l'eau tombera en gouttes par les petits trous dans le bassin, & bouchant la petite ouverture M, empêchera que l'air ne puisse aller prendre sa place, & par conséquent elle cessera de couler : cependant celle qui est dans le bassin tombera dans le vase inférieur, & dès que l'ouverture inférieure du tuyau M sera dégagée, & que l'air pourra pénétrer dans le vase supérieur, l'eau recommencera à couler par les petits trous comme auparavant.

Problême XII.

26. Faire une fontaine jaillissante dans un vase de verre fermé.

Solution.

1°. Ayez une boule creuse de verre dont l'ouverture soit garnie d'une vis BE.

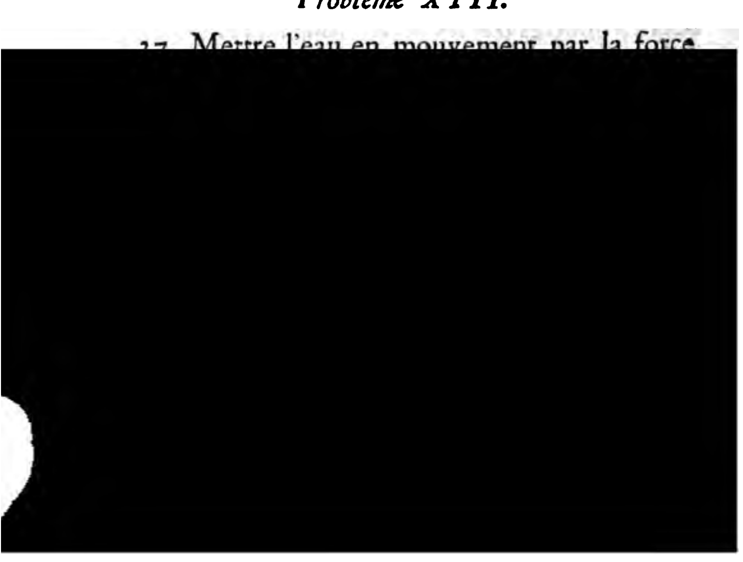
Fig. 15. 2°. Faites passer dans la vis un petit tube DC, ayant l'ouverture C fort petite, & celle de l'autre bout D, qui sort du verre, beaucoup plus grande.

3°. Soudez à la même vis un tube EF, large vers le bout E, & menu vers F, mais long au double de l'autre.

4°. Faites une communication entre les deux vases IK & LM par le moyen du tube HN, & soudez à la base du supérieur le tube GH, dans lequel vous introduirez le tube EF, de façon qu'il descende jusqu'au vase inférieur.

Si vous remplissez d'eau le vase IK & environ le tiers du globe A, elle descendra du globe par le tube EF dans le vase LM, & montera dans la boule par le petit tube DC en jaillissant par l'ouverture C.

Problême XIII.



3°. Soudez au fond du haut AB le tube FE, qui descende presque jusqu'au fond CD, & dont la partie F qui s'éleve au-dessus du vase soit faite en vis, afin de pouvoir y adapter non seulement une pompe foulante, mais encore le robinet F qui doit donner ou fermer le passage à l'air & à l'eau renfermés dans le vase.

Si, le vaisseau étant ainsi préparé, vous y comprimez l'air par le moyen d'une pompe ou seringue (§. 42, Airom.), & qu'après l'avoir retirée vous adaptiez en F le petit tube dont l'ouverture sera très petite, & qu'ensuite vous ouvriez le robinet, l'air fera sortir l'eau par le tube F avec beaucoup d'impétuosité.

Démonstration.

L'élasticité de l'air se bande extrêmement par la compression (§. 24, Airom.); & comme il presse infiniment plus que l'air extérieur ne résiste, il faut absolument qu'il chasse l'eau hors du vase, jusqu'à ce qu'ayant acquis une densité égale à l'air extérieur, il se trouve en équilibre avec lui. (§. 13, Hydrost.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autre méthode.

Ayez un globe creux de verre double AB, à l'ouverture A duquel vous attacherez avec du ciment un tube aussi de verre CD, dont le bout C & son ouverture seront très petits, & iront en s'élargissant un peu jusqu'au fond du globe. Si après l'avoir presque tout rempli d'eau vous comprimez l'air qui est renfermé en soufflant fortement dedans avec la bouche, dès que vous l'aurez retirée, l'eau sortira du vase comme une fontaine.

Fig. 19.

Démonstration.

Elle est la même que la précédente.

Remarque I.

28. On peut faire le globe de cuivre au lieu de verre, & pour lors il n'est pas nécessaire de faire descendre le tube dans le globe. On nomme cette machine *éolipyle*. Pour la mettre en usage, on fait chauffer ce globe sur un réchaut; on plonge ensuite l'orifice C dans l'eau, & peu-à-peu le globe se remplit. Lorsqu'il est presque plein on le remet sur le feu; & quand il a acquis un certain degré de chaleur, l'air se dilatant, & trouvant l'eau qui s'oppose à sa sortie, il la chasse par l'orifice C à la hauteur d'une douzaine de pieds. Si au lieu d'eau on remplit le globe d'esprit de vin ou de fine eau-de-vie, & qu'on approche une bougie allumée de l'orifice C, pendant que l'air la fait sortir, au lieu d'un jet d'eau l'esprit de vin forme un jet de feu.

Remarque II.

29. Le verre ne pouvant résister à l'action du feu, pour remplir le globe de verre il faut en su-

qui sort est obligée de rentrer avec celle qui demeure.

Solution.

1°. Mettez l'un sur l'autre & joignez bien ensemble deux vases PR & HQ. Qu'il y ait un espace entre deux, ou qu'il n'y en ait pas, il n'importe. S'il y en a, affermissez-les l'un sur l'autre avec des colonnes bien soudées.

Pl. II. Fig. 17.

2°. Soudez au couvercle du vase supérieur (lequel couvercle doit être concave & fait en forme de bassin) le tube DL ouvert par les deux bouts, & qui descendra presque jusqu'au fond du vase inférieur HQ.

3°. Soudez au couvercle du vase inférieur le tube FM, ouvert aussi par les deux bouts, & qui montera presque jusqu'au couvercle du vase supérieur PD.

4°. Soudez enfin au milieu du couvercle du vase supérieur le tube AC, qui sera aussi ouvert par les deux bouts, mais dont l'ouverture A sera très petite, & l'autre de la largeur du tube qui doit descendre presque jusqu'au fond du vase supérieur HR.

Si, après avoir rempli d'eau le vase supérieur, vous en jettez ensuite sur son couvercle KO, l'eau commencera à jaillir par l'ouverture A, & il en sortira autant qu'il y en aura dans le vase supérieur.

Démonstration.

Pendant que l'eau du bassin KO s'insinue par le tube DL, elle chasse l'air du vase HQ, & le faisant passer par le tube FM, elle le pousse dans le vase supérieur; & parceque la pression de l'eau le

comprime, son élasticité se bande (§. 24, Airom.). Or l'air extérieur pressant avec moins de force en A que l'air renfermé dans le vase P R, il faut nécessairement que l'eau sorte par l'orifice A, & cette eau qui sort retombant sur le bassin K O, elle entre de nouveau par le tube D L, & chasse l'air du vase inférieur dans le supérieur par le tube F M. Il en jaillira donc autant qu'il s'en trouvera dans le vase supérieur, & de cette façon l'eau qui sort rentre avec celle qui demeure. *Ce qu'il falloit démontrer.*

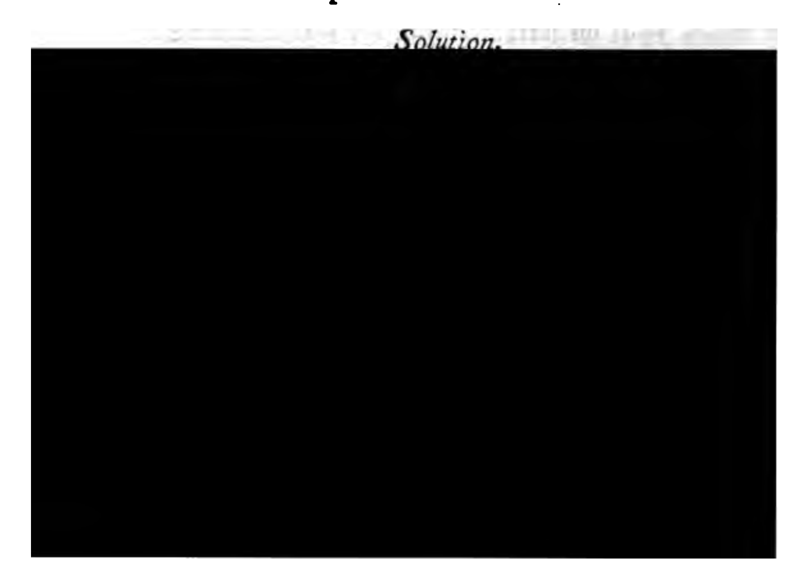
Remarque.

31. On croit que Héron d'Alexandrie fut l'inventeur de cette fontaine ingénieuse; c'est pourquoi on la nomme la *fontaine de Héron.* L'eau en sort par la même raison que nous avons rapportée dans le §. 27, excepté que dans le cas présent l'air se trouve comprimé par la pesanteur de l'eau qui s'introduit par le tube D L.

Problême X V.

32. Faire une fontaine jaillissante par le moyen de l'air raréfié par la chaleur.

Solution.



un autre tube dont l'extrémité M s'éleve au-dessus du bassin, n'ayant qu'une petite ouverture, & dont l'autre bout plus ouvert descende presque jusqu'au fond du vase supérieur C D.

Si vous posez cette machine sur des charbons allumés après avoir rempli d'eau le vase supérieur, celle du vase A D sortira par l'orifice M du tube M L, & elle tombera dans le bassin G H.

Démonstration.

La chaleur, raréfiant l'air renfermé dans le vase inférieur C D E F, bande son élasticité (§. 45, Airom.). Cette élasticité comprime avec plus de force l'eau renfermée dans le vase A D, que l'air extérieur ne résiste à l'orifice M; par conséquent l'eau doit sortir par le tube L M. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

On ne s'est pas fort étendu sur l'Hydraulique dans cette traduction. Ceux qui voudront s'instruire parfaitement de cette partie des Mathématiques, pourront l'étudier dans le grand ouvrage de M. Belidor, intitulé, *Architecture Hydraulique*, dont la premiere partie, en deux volumes *in-quarto*, accompagnés de cent planches, renferme tout ce qu'on peut desirer sur l'art d'élever, de conduire, & de diriger les eaux pour tous les besoins de la vie.

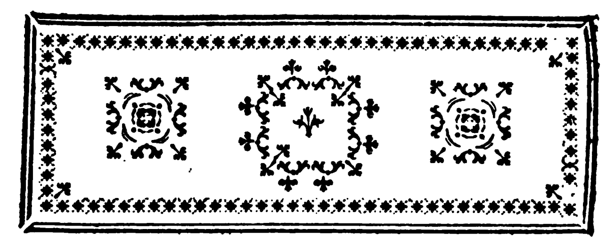
Fin de l'Hydraulique.



SUPPLÉMENT
AU
CALCUL LITTÉRAL.

AVERTISSEMENT.

FEU M. de Montcarville, qui a profeſſé les Mathématiques avec ſuccès pendant plus de quarante années, & qui a toujours été regardé avec juſtice comme un des meilleurs Maîtres de Paris, n'étant point content des Eléments d'Arithmétique & d'Algebre que l'on trouve dans la premiere édition de cet Abrégé, qu'il ne jugeoit pas aſſez étendus pour être à la portée des Commençants, s'étoit déterminé à compoſer ceux que l'on a mis à la tête de cette nouvelle édition : mais la mort l'ayant enlevé avant qu'il ait pu terminer ſes Eléments de Calcul Littéral, nous nous ſommes apperçus qu'il n'avoit donné qu'une partie de ces Eléments, & qu'il lui reſtoit encore à traiter ce qui regarde la nature & la réſolution des Equations, tant ſimples que compoſées, ainſi que les pro-



ÉLÉMENTS D'ALGEBRE.

DÉFINITION I.

1. LES quantités ou grandeurs desquelles on ne peut extraire exactement la racine, se nomment quantités ou grandeurs *irrationnelles ;* si ce sont des nombres, on les nomme *nombres irrationnels*, comme $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{6}$.

DÉFINITION II.

2. *L'équation* est une double expression d'une quantité ou d'une grandeur par des termes différents ; comme $2 + 3 = 1 + 4$, où vous voyez que 3 ajoutés à 2 font la somme de 5, aussi bien que 4 ajoutés à 1.

Problême I.

3. Résoudre par l'algebre un problême proposé.

Regle.

1°. Distinguez les grandeurs ou quantités proposées & connues de celles que vous cherchez ;

les connues par les premieres lettres de l'alphabet *a*, *b*, *c*, *d*, &c. & les inconnues par les dernieres *x*, *y*, *z*.

2°. Cherchez autant d'équations qu'il se trouve de grandeurs inconnues : si cela ne peut se faire, c'est une marque que le *problême* n'est pas *déterminé*, & que l'on peut prendre à volonté une ou plusieurs des grandeurs que l'on cherche. Pour les équations, on les trouve dans l'énonciation du problême, sinon il faut les extraire de l'expression même ou des circonstances du problême, à l'aide des théorêmes sur l'égalité.

3°. Comme dans l'équation les quantités connues sont mêlées avec les inconnues, il faut les séparer, de maniere que d'un côté on n'ait qu'une seule quantité inconnue, & de l'autre toutes celles qui sont bien connues. Pour en venir à bout, on ajoutera les quantités soustraites ; on soustraira celles qui sont ajoutées ; on divisera celles qui sont multipliées ; on multipliera celles qui sont divisées ; on extraira la racine des puissances ; on élévera les racines aux puissances, afin de conserver toujours par cette opération une même égalité.

Problême II.

4. Ayant la somme de deux quantités avec leur

Donc $a - x = b + x$
$x = x$ ajouté.
$a = b + 2x$
$b = b$ soustrait
$a - b = 2x$
——————— (2 Divis.
$\frac{a-b}{2} = x$

Ainsi la valeur de x substituée à celle de $y = b + x$, on a $y = b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Regle.

Soustrayez de la somme a la différence b, & divisez le reste par 2 : le quotient est la plus petite quantité x. Ajoutez la différence à la somme, & la moitié sera la plus grande quantité y.

Soit pour exemple,

$a = 30$, $b = 8$, on a $(a - b) : 2 = (30 - 8) : 2 = 22 : 2 = 11$, & $(a + b) : 2 = (30 + 8) : 2 = 38 : 2 = 19$.

Remarque.

5. De cette derniere équation on pourroit former une regle générale pour résoudre le problême dans tous les cas qu'on peut le proposer, si l'on substituoit aux lettres de l'algebre les noms des choses exprimées par ces lettres, & si au lieu des signes on faisoit les opérations d'arithmétique qu'ils représentent : mais comme nous ne nous sommes proposé que de faire un abrégé, pour éviter d'être trop diffus, nous ne mettrons point de regles, à moins que des circonstances particulieres ne l'exigent. Je le fais d'autant plus volontiers qu'on a beaucoup plutôt résolu un exemple

donné par les chiffres quand on les ſubſtitue aux lettres, qu'en ſe ſervant d'une regle pour opérer par ces mêmes lettres. D'ailleurs, on trouve ſouvent dans ces équations, où les quantités connues & inconnues ſont mêlées, divers théorêmes très utiles.

Dans l'équation, par exemple, $a - b = 2x$, on voit le théorême ſuivant.

Si de la ſomme de deux quantités on ſouſtrait leur différence, ce qui reſte eſt le double de la plus petite de ces quantités.

Exemple.

6 & 11 font 17 : je ſouſtrais de 17 la différence de 6 à 11 qui eſt 5, il reſte 12; la moitié de 12 eſt 6, qui eſt la plus petite des deux quantités propoſées.

Problême III.

6. Trouver un nombre dont la moitié avec la troiſieme & la quatrieme partie ſurpaſſeront ce nombre d'une ſeule unité.

Solution.

Soit le nombre cherché x, il ſera ainſi par les conditions du problême.

On ne trouve donc aucun autre nombre que 12, qui puiſſe être celui que l'on cherche.

Problême IV.

7. Ayant la ſomme de deux nombres & le produit de l'un par l'autre, trouver ces mêmes nombres.

Solution.

Soit la ſomme $= a$, la demi-diff. $= x$,
le prod. $= b$, le plus gr. nomb. $= \frac{1}{2}a + x$ } §. 3.
le plus petit $= \frac{1}{2}a - x$

Donc par les conditions du problême

$$\frac{1}{4}aa - xx = b$$

$$xx = xx \text{ ajout.}$$

$$\frac{1}{4}aa = b + xx$$

$$b = b \text{ ſouſtr.}$$

$$\frac{1}{4}aa - b = xx$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}aa - b} = x$$

Soit $a = 14$, $b = 48$: on aura $\sqrt{\frac{1}{4}aa - b} = \sqrt{(49 - 48)} = 1$. Donc le plus grand nombre ſera $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1$; & le plus petit $\frac{1}{2}a - x = 7 - 1 = 6$.

Problême V.

8. Ayant la ſomme de deux quantités & la différence de leurs quarrés, trouver ces deux quantités.

Solution.

Soit la ſomme $= a$ demi-diff.
la diff. des quar. $= b$ des quantit. $= y$:
la plus grande quantité ſera $= \frac{1}{2}a + y$
la plus petite $= \frac{1}{2}a - y$ (§. 3.)

Le □ de la plus grande $= \frac{1}{4} aa + ay + yy$
— de la plus petite $= \frac{1}{4} aa - ay + yy$

la différ. des □ $b = 2ay$
2 a Divis.

$$\frac{b}{2a} = y$$

Soit $b = 40$, $a = 10$: on aura $y = \frac{40}{20} = 2$; & par conséquent un des deux nombres $\frac{1}{2} a + y = 5 + 2 = 7$; l'autre $\frac{1}{2} a - y = 5 - 2 = 3$.

Problême VI.

9. Ayant la somme de deux quantités, & la somme de leurs quarrés, trouver l'une & l'autre quantité.

Solution.

Soit la premiere somme $= a$ demi-différ.
la deuxieme $= b$, des quantités $= y$.
La plus grande quantité sera $= \frac{1}{2} a + y$ (§. 3).
la plus petite. . . . . $= \frac{1}{2} a + y$
Le □ de la plus grande $= \frac{1}{4} aa + ay + yy$
celui de la plus petite $= \frac{1}{4} aa - ay + yy$

Problême VII.

10. Je vends à un tel prix telle mesure de vin; combien faudra-t-il que j'y mêle d'eau pour le vendre à un tel prix plus bas?

Solution.

Soit le plus haut prix $= a$, quantité d'eau $= x$.
Le plus bas $= b$.
Quantité de mesures $= 1$.

Donc le prix de la quantité $1 + x = b + bx$. Car comme 1 est à b, de même $1 + x$ est à $b + bx$, & comme l'eau est supposée ne rien couter, nous disons

$$b + bx = a$$

$$bx = a - b$$

$$x = (a - b) : b.$$

Soit $a = 16$, $b = 10$: on aura $x = (16 - 10) : 10 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Problême VIII.

11. Le prix d'un vin excellent & celui d'un vin moins bon une fois posés, déterminer la quantité qu'il faut mêler de ce dernier avec l'autre pour faire un vin qu'on puisse vendre à un prix moyen.

Solution.

Soit le prix du meilleur $= a$
Du plus commun $= b$
Le prix moyen $= c$
Nombre des mesures $= 1$

Quantité du vin commun qu'il faut mêler avec le bon $= x$
Son prix sera $= bx$
Quantité du bon qu'il faut mêler avec le commun $= 1 - x$
Son prix sera $= 1 - ax$.

C'eſt pourquoi, ſelon la condition du problême,

$$a - ax + bx = c$$
$$+ ax \quad = ax \text{ ajout.}$$
$$a + bx = c + ax$$
$$bx = bx \text{ ſouſtr.}$$
$$a = c + ax - bx$$
$$c = c \text{ ſouſtr.}$$
$$a - c = ax - bx = (a - b)x$$
$$\frac{a - c}{a - b} = x$$

Soit $a = 16$, $b = 10$, $c = 12$: on aura $x = (16 - 12) : (16 - 10) = 4 : 6 = \frac{2}{3}$.

Il faut donc en prendre $\frac{2}{3}$ du commun, & $\frac{1}{3}$ du meilleur, pour faire le mêlange que l'on cherche.

DÉFINITION III.

12. On appelle *racine binome* celle qui eſt compoſée de deux parties, comma $a + b$; on appelle *trinome* celle de trois, comme $a + b + c$; *quadrinome*, celle de quatre, comme $a + b + c + d$: en général on donne le nom de *multinome* à toutes

donc la racine binome par elle-même, le produit indiquera de quelles parties est composé le quarré, & comment les parties du quarré se forment des parties de la racine.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline +\ ab+bb \\ aa+ab \quad\ \\ \hline aa+2ab+bb \end{array}$$

quarré de la racine binome.

Théorême.

Le quarré d'une racine binome contient les quarrés de chaque partie (a^2 & b^2) & le produit ($2ab$) pris deux fois d'une partie ($2a$) multipliée par l'autre (b).

DÉFINITION IV.

14. L'équation affectée sous le quarré est celle où $xx \mp ax = \pm b$.

Problême X.

15. Résoudre une équation affectée sous le quarré.

Solution.

Prenez x dans l'équation $xx \mp ax = \pm bb$, pour une partie de la racine binome; puis a, quantité connue du second membre, sera le double de la racine de l'autre partie: & ainsi $\frac{1}{2}a$ sera l'autre partie de la racine: il s'ensuit donc que les deux nombres $xx \mp ax$ feroient un quarré parfait, s'il n'y manquoit pas le quarré de la partie $\frac{1}{2}a$,

ou $\frac{1}{4}aa$. Si l'on ajoute donc ce quarré de part & d'autre, on pourra extraire la racine quarrée, & il sera facile de résoudre l'équation proposée.

$$xx.\ ax = b^2$$
$$\frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa$$
$$xx.\ ax + \frac{1}{4}aa = bb + \frac{1}{4}aa.$$
$$x.\ \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa.bb}$$
$$x = \frac{1}{2}a.\ \sqrt{\frac{1}{2}aa.bb}.$$

Remarque.

16. J'ai mis des points (.) au lieu des signes + & — afin de n'être pas obligé de distinguer plusieurs cas. On aura lieu de voir souvent l'usage de cette regle dans la suite, il suffit actuellement de l'éclaircir par le problême suivant.

Problême XI.

17. Ayant le produit de deux grandeurs avec leur différence, trouver ces mêmes grandeurs.

Solution.

Donc $a : y = b + y$

$\overline{\qquad\qquad\qquad}$ y multip.

$$a = by + yy$$
$$\tfrac{1}{4}bb = \tfrac{1}{4}bb$$
$$\overline{a + \tfrac{1}{4}bb = \tfrac{1}{4}bb + by + yy}$$
$$\sqrt{(a + \tfrac{1}{4}bb)} = \tfrac{1}{2}b + y$$
$$\overline{\sqrt{(a + \tfrac{1}{4}bb)} - \tfrac{1}{2}b = y.}$$

Soit $a = 40$, $b = 3$, on aura $y = \sqrt{(40 + \frac{9}{4})}$ $- \frac{2}{3} = \sqrt{(\frac{169}{4})} - \frac{3}{2} = (\frac{13}{2} = \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5)$; & par conféquent $x = 8$.

Problême XII.

18. Déterminer la différence de deux quarrés dont les racines ne different que d'une unité.

Soit une racine $= n$, & l'autre $= n + 1$,
Le □ de la grande $= nn + 2n + 1$,
De la petite $= nn$,
Différence $= 2n + 1$.

Solution.

Tout nombre pris deux fois donne un nombre pair. Le nombre pair ne differe de l'impair que d'une unité; le nombre impair, égal à la fomme des racines, eft donc précifément la différence de deux quarrés qui ne different que d'une unité.

Soient les racines 8 & 9 : la différence des deux quarrés fera $17 = 8 + 9$.

Problême XIII.

19. Déterminer la différence de deux cubes dont les racines ne different que d'une unité.

Solution.

Soient les racines n & $n+1$: Le cube sera $\begin{cases} \text{le plus grand} = n^3 + 3nn + 3n + 1 \\ \text{le plus petit} = n^3 \end{cases}$

La différence $= \quad 3nn + 3n + 1$

$\quad -2$

C'est-à-dire, $nn + 2n + 1 + 2nn + n = n + 1 + 2n^2 + n.$

La différence que l'on cherche est donc la somme du quarré de la plus grande racine, du quarré de la plus petite pris deux fois, & de la petite racine elle-même.

E X E M P L E.

Soient les racines 8 & 9, la différence des cubes sera $217 = 81 + 128 + 8 = 9^2 + 2 . 8^2 + 8$.

Problême XIV.

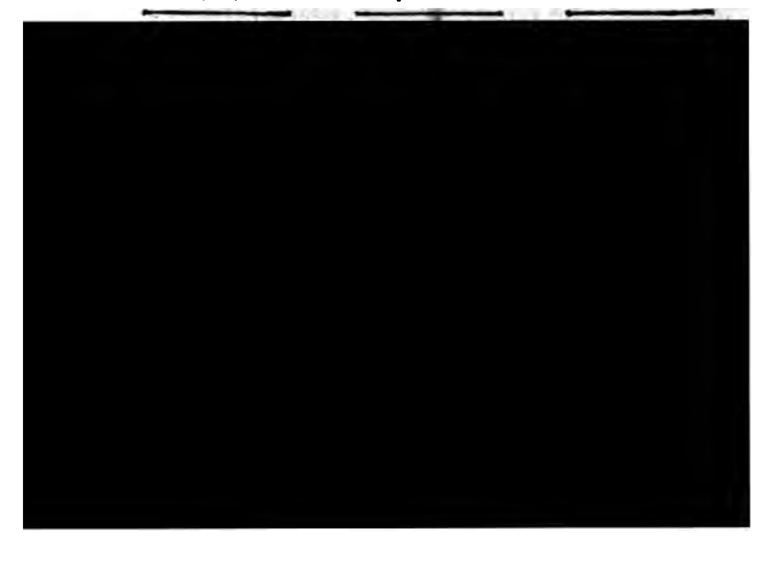
20. Déterminer la somme du premier & du dernier terme, dans la progression arithmétique.

Solution.

Soit le premier terme a, la différence des termes d : on aura la progression

$a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d . a + 5d$, &c.

$a + 4d . \quad a + 2d \quad a$



des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens, pourvû qu'ils ſoient à égale diſtance des extrêmes. La ſomme de ces exrêmes eſt auſſi égale au double du moyen quand le nombre eſt impair.

EXEMPLE.

3. 6. 9. 12. 15. 18. 21.
12 9 6 3

24 = 24 = 24 = 24.

Corollaire.

21. On aura donc la ſomme de la progreſſion arithmétique, ſi l'on multiplie la ſomme des extrêmes par le nombre qui fait la moitié des termes.

Problême XV.

22. Ayant le premier terme, la différence des termes, & ſomme de la progreſſion arithmétique, trouver le nombre & le dernier des termes.

Solution.

Soit le premier terme $= a$, le dernier $= y$, la différence $= d$, leur nombre $= x$, la ſomme $= c$; on aura (§. 21.)

$\frac{1}{2}x(+y) = c$, $a + \overline{x - 1}\,d = y$

2. Multip.

$ax(+xy) = 2c$

$xy = 2c - ax$

x Diviſ.

$y = (2c - ax) : x$. Donc

$(2c - ax) : x = a + dx - d$

x Multip.

$2c - ax = dxx + ax - dx$

d Diviſ.

$$2c = dxx + 2ax - dx$$

$$2c : d = xx + \frac{(2a - d)}{d}\, x$$

C'est-à dire, si l'on fait $\frac{(2a-d)}{d} = m$

$$2c : d = xx + mx$$

$$\tfrac{1}{4} m^2 = \tfrac{1}{4} mm \text{ (§. 15.)}$$

$$2c : d + \tfrac{1}{4} m^2 = xx + mx + \tfrac{1}{4} mm$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{4} mm + 2c : d} = x + \tfrac{1}{2} m$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{4} mm + 2c : d} - \tfrac{1}{2} m = x.$$

Soit $a = 2$, $d = 3$, $c = 57$, on aura $m = (4 - 3) : 3 = \frac{1}{3}$; donc $x = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{114}{3}} - \frac{1}{6} = \sqrt{\frac{1369}{36}} - \frac{1}{6} = \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$. Conséquemment $y = 2 + 5 . 3 = 2 + 15 = 17$.

Problême XVI.

23. Trouver combien de fois on peut changer les termes d'une proportion géométrique, sans détruire cette proportion.

Solution.

On n'a qu'à changer les termes autant de fois qu'on le peut, comparer entre elles leurs sommes, leurs différences, &c. on verra pour lors quels

Soit donc $a : ma = b : mb$, à changer, on aura

alternando $a : b = ma : mb$

invertendo $ma : a = mb : b$

convertendo $a + ma : a = b + mb : b$

componendo $a + ma : ma = b + mb : mb$

dividendo $ma - a : a = mb - b : b$

$ma - a : ma = m - b : mb$.

Or $aa : mmaa = bb : mmbb$.

Ou généralement $a^n : m^n a^n — b^n : m^n b^n$.

De même

$$a : mac = b : mbc$$

$$a : \frac{ma}{c} = b : \frac{mb}{c}$$

$$ac : ma = bc : mb$$

$$\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$$

$$ac : mac = b : mb$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$$

$$ac : mac = bd : mbd$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$$

Soit selon l'ordre $a : ma = b : mb$

& $ma : mna = mb : mnb$

on aura tout de même $a : mna = b : mnb$.

Soit sans ordre $a : ma = b : mb$

& $ma : mna = \frac{b}{n} : b$

on aura aussi $a : mna = \frac{b}{n} : mb$

Problême XVII.

24. Trouver la maniere de changer deux grandeurs, de maniere que leur premier rapport demeure le même.

Solution.

Soient les deux quantités a & ma, ayant I pour rapport à m; on aura

I $\frac{a : ma}{c \quad c}$ $\qquad$ II $\frac{a : ma}{c \quad c}$

$ac : mac = a : ma$ $\qquad$ $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = a : ma$

$= 1 : m$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $1 : m$

III $\frac{a : ma}{a : mb.}$ $\qquad$ IV $\frac{a : ma}{b : mb}$

$a - b : ma - mb = a : ma.$ $\quad a + b : ma + mb = a : ma$

$= b : mb$ $\qquad\qquad\qquad\qquad = b : mb$

$= 1 : m$ $\qquad\qquad\qquad\qquad = 1 : m$

Théorême.

I. Si l'on multiplie deux grandeurs par une même troisieme, les produits seront en même raison que les grandeurs.

II. Deux grandeurs a & b étant divisées par une même, comme c, les quotients sont en même raison que les grandeurs.

III. Si les parties que l'on soustrait des gran-



multiplié par le dernier dans une progression géométrique.

Solution.

Soit le premier terme a, l'exposant m; on aura la progression

$$\begin{array}{l} a.\ ma.\ m^2a.\ m^3a.\ m^4a.\ m^5a.\ m^6a. \\ \quad m^5a \quad\quad m^3a\ m^6a \quad\quad\ a \\ \hline m^6a = m^6a\ m^6a = m^6a. \end{array}$$

Théorême.

Dans toute progression géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, qui de part & d'autre sont en même rapport avec les extrêmes; & si le nombre des termes est impair, le produit des extrêmes est égal au quarré du moyen, & au produit des autres moyens, qui sont en même raison que quand le nombre des termes est pair.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{l} 3.\quad 6.\quad 12.\quad 24.\quad 48.\quad 96. \\ \quad\quad\quad\quad\quad\ 12 \quad\quad 6 \quad\quad 3 \\ \hline 288 = 288 = 288 \end{array}$$

Exemple de la seconde partie du théorême.

$$\begin{array}{l} 3.\quad 6.\quad 12.\quad 24.\quad 48.\quad 96.\quad 192. \\ \quad\quad\quad\quad\quad\ 24 \quad\quad\quad\quad\quad\ 3 \\ \hline 576 \quad = \quad 576 \end{array}$$

Problême XIX.

26. Déterminer le quotient dans une division faite de la différence du premier & du dernier

terme, par l'exposant qu'on aura diminué d'une unité.

Solution.

Soit le premier terme a, l'exposant m, le nombre des termes n; le dernier terme sera $m^{n-1}a$, la différence du premier & du dernier $m^{n-1}a - a$. Si on divise cette différence par $m - 1$, on aura le quotient $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a$, &c.

$$m - 1)\, m^{n-1}a - a \left\{ \begin{array}{l} m^{n-2}a + m^{n-3}a + \\ m^{n-4}a + m^{n-5}a + \\ m^{n-6}a + m^{n-7}a, \&c. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} + m^{n-1}n - m^{n-2}a \\ \hline + m^{n-2}a - a \\ + m^{n-2}a - m^{n-3}a \\ \hline + m^{n-3}a - a \\ + m^{n-4}a - m^{n-5}a \\ \hline + m^{n-5}a - a \\ + m^{n-5}a - m^{n-6}a \\ \hline m^{n-6}a - a \end{array} \quad \&c.$$

Si l'on détermine n, par exemple, à 7, on aura $n - 7 = 0$; conséquemment $m^{n-7}a = m^0 a$, & ainsi la division sera finie; & de cette division naît le théorême suivant.

Théorême.

Si l'on divise la différence du premier & du dernier terme d'une progression géométrique par l'exposant duquel on a ôté une unité, le quotient sera la somme de tous les termes, excepté le dernier.

Corollaire.

Si l'on ajoute donc le dernier terme au quotient dont je viens de parler, on aura la ſomme de toute la progreſſion géométrique.

DÉFINITION V.

27. On dit que trois ou quatre termes ſont en *proportion harmonique*, lorſque la différence du premier & du ſecond a une même raiſon avec la différence du ſecond & du troiſieme, que le premier terme a avec le troiſieme. Ainſi ces trois nombres 60, 30, 20, ſont une proportion harmonique; car la différence de 60 à 30, qui eſt 30, a une même raiſon avec 10, différence de 30 à 20, que 60 avec 20.

Et dans le ſecond cas, on dit que quatre grandeurs ſont en *proportion harmonique*, lorſque la différence de la premiere & de la ſeconde eſt à la différence de la troiſieme & de la quatrieme, comme la premiere grandeur à la quatrieme. Si dans le premier cas on continue les termes avec la même méthode, ce ſera une *progreſſion harmonique*.

Remarque.

Cette *proportion* qu'on nomme *harmonique* a pris ſon nom de ce que les Muſiciens s'en ſervent dans leurs compoſitions, & en font beaucoup de cas. Elle eſt, pour ainſi dire, compoſée de la proportion arithmétique & de la proportion géométrique, comme on le voit dans le raiſonnement de la définition ci-deſſus.

Problême XX.

28. Ayant deux grandeurs, en trouver une

D d iv

troiſieme qui leur ſoit en proportion harmonique.

Solution.

Soit la premiere $= a$, la troiſieme $= x$, la ſeconde $= b$,

on aura (§. 27.)

$$b - a : x - b = a : x$$

$$ax - ab = bx - ax$$

$$2ax - bx = ab$$

$$(2a - b) \text{ Diviſ.}$$

$$x = \frac{ab}{2a - b}$$

Soit $a = 10$, $b = 16$; on aura $x = 160 : (20 - 16) = 160 : 4 = 40$.

Corollaire I.

29. Si $2a = b$, on aura $x = ab : 0$; conſéquemment $1 : 0 = x : ab$; & ainſi dans ce cas on ne ſauroit trouver un nombre qui ſoit en proportion harmonique, encore moins le trouvera-t-on lorſque b ſera plus grand que $2a$.

Corollaire II.

Solution.

Soit la premiere $= a$,
la seconde $= b$, la troisieme $= x$,
on aura (§. 17.)

$$x - a : b - x = a : b$$

$$bx - ab = ab - ax$$

$$ax + bx = 2ab$$

$$x = 2ab : (a + b)$$

Soit $a = 10$, $b = 40$, on aura $x = \frac{800}{50} : = 16$:

Problême XXII.

32. Trois grandeurs étant données, en trouver une quatrieme qui soit en proportion harmonique.

Solution.

Soit la premiere grandeur $= a$,
la seconde $= b$, la 4[e] $= x$
la troisieme $= c$,
on aura (§. 27.)

$$b - a : x - c = a : x$$

$$bx - ax = ax - ac$$

$$ac = 2ax - bx$$

$$2a - b \text{ Divis.}$$

$$ac : (2a - b) = x$$

Soit $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$, on aura $x = 72$: $(12 - 8) = 72 : 4 = 18$.

Problême XXIII.

33. Trouver un cercle égal à la superficie d'un cylindre.

Solution.

Soit le diametre du cylindre d, ſa circonférence p, ſa hauteur a; on aura la ſuperficie ap (§. 197, Géom.). Soit le diametre du cercle x; on aura $d : p = x : \frac{px}{d}$ (§. 129, Géom.); la circonférence du cercle eſt donc $\frac{px}{d}$, & ſa ſuperficie ſera $\frac{pxx}{4d}$ (§. 134, Géom.). Donc

$$px^2 : 4d = ap$$
$$x^2 = 4ad$$
$$x = \sqrt{4ad}, \text{ ou } \tfrac{1}{2}\, x = \sqrt{ad}.$$

Théorême.

La ſuperficie d'un cylindre eſt égale à un cercle dont le rayon eſt moyen proportionnel entre le diametre & la hauteur du cylindre.

Problême XXIV.

34. Connoiſſant la hauteur d'un cylindre égale

(§. 129, Géom.); sa solidité $apx^2 : 4d$ (§. 197, Géom.). C'est pourquoi

$$\frac{1}{6}pd^2 = apx^2 : 4d$$
$$\text{————————— } 4d \text{ Multip.}$$
$$\frac{4}{6}pd^3 = apx^2$$
$$\text{————————— } ap \text{ Divis.}$$
$$\frac{2}{3}\frac{d^3}{a} = x^2$$

Et par conséquent $3a : 2d = d^2 : x^2$.

Problême XXV.

35. Ayant le diametre & la hauteur d'un cône, trouver le diametre d'un cylindre qui soit égal au cône en hauteur & en solidité.

Solution.

Soit le diametre du cône d, sa hauteur a, le diametre du cylindre x, le rapport du diametre à la circonférence $d : p$; on aura pour la solidité du cône $\frac{1}{12}adp$ (§. 201, Géom.); la circonférence du cylindre $px : d$, & sa solidité $apx^2 : 4d$ (§. 197, Géom.); ainsi donc

$$\frac{1}{12}adp = apx^2 : 4d$$
$$\text{————————— } 4d \text{ Multip.}$$
$$\frac{4}{12}ad^2p = apx^2$$
$$\text{————————— } ap \text{ Divis.}$$
$$\frac{1}{3}d^2 = x^2$$
$$\text{—————}$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = x.$$

x est donc le moyen proportionnel entre $\frac{1}{3}d$ & d.

Problême XXVI.

36. Connoissant le diametre & la hauteur d'un

cône, trouver le diametre d'une boule qui lui ſoit égal.

Solution.

Soit le diametre de la baſe d'un cône d, ſa circonférence $= p$, ſa hauteur a, le diametre de la boule x; on aura pour ſolidité du cône $\frac{1}{12}\ adp$ (§. 201, Géométrie); & la ſolidité de la boule $px^3 : 6d$ (§. 208, Géom.). De là

$$\frac{1}{12}\ adp = px^3 : 6d$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \ 6d \text{ Multip.}$$

$$\frac{6}{12}\ ad^2p = px^3$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \ p \text{ Diviſ.}$$

$$\frac{1}{2}\ ad^2 = x^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}\ ad^2} = x$$

Problême XXVII.

37. Expliquer la nature des équations.

Solution.

1°. Prenez autant de valeurs que vous voudrez de la grandeur inconnue, formez-en de ſimples équations, mais égales à zéro.

2°. Multipliez ces ſimples équations l'une par l'autre ; il en naîtra des équations plus grandes

Multipliez d'abord la premiere équation par la seconde, vous multiplierez ensuite le produit par la troisieme.

$$\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \\ \hline 3x - 6 \\ x^2 - 2x \\ \hline x^2 + x - 6 = 0 \\ x - 4 = 0 \\ \hline -4x^2 - 4x + 24 \\ x^3 + x^2 - 6x \\ \hline x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 10 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x - a = 0 \\ x + b = 0 \\ \hline +bx - ab \\ xx - ax \\ \hline x^2 - ax + bx - ab = 0 \\ x - c = 0 \\ \hline x^3 - cx^2 - bcx - abc = 0 \\ +bx^2 + acx \\ -ax^2 - abx \\ \hline \end{array}$$

En faisant attention à ces équations qu'on peut facilement élever à des degrés plus hauts, on observera avec Harriot & Descartes,

1°. Que la grandeur connue du second membre est la somme des racines, mais marquées par un signe contraire; que la grandeur connue du troisieme est la somme des produits des membres multipliés deux à deux; que la grandeur connue du quatrieme est la somme des produits des racines multipliés trois à trois, &c. enfin, que le dernier membre est le produit de toutes les racines. Dans l'équation quarrée, par exemple la grandeur connue $1 = 3 - 2$ du second membre, les racines sont $+2$ & -3. De même dans l'équation cubique, la grandeur connue du second membre $-3 = +3 - 4 - 2$; les racines sont $-3 + 4$, & $+2$. La grandeur connue du troisieme membre dans l'équation cubique $-10 = -6 + 8 - 12$,

les racines sont — 3, + 4 & + 2. Le dernier membre dans la même équation est + 24 = 2. 3. 4.

2°. Il faut aussi observer qu'il y a autant de véritables racines dans une équation, qu'il s'y trouve de changements de signes; & autant de fausses qu'il y a de successions de ces mêmes signes.

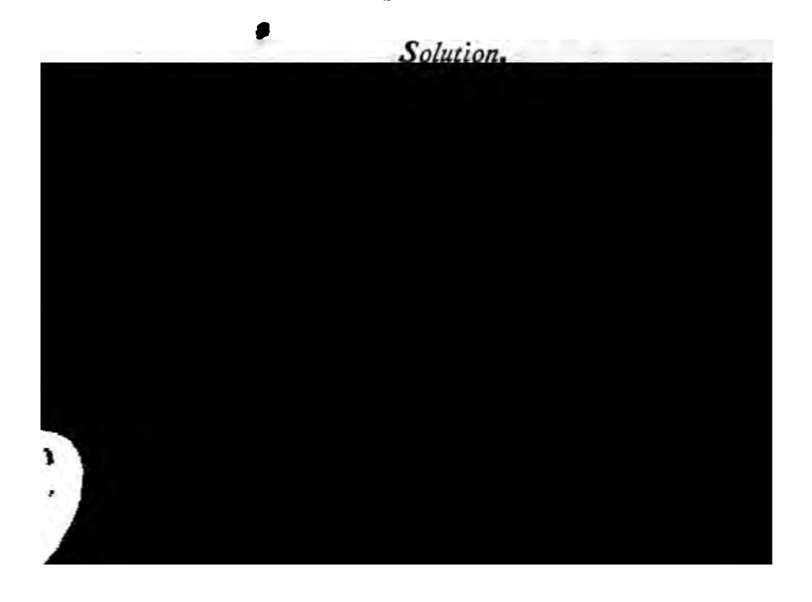
Exemple.

Dans l'équation quarrée $x^2 + x - 6 = 0$, il n'y a qu'une succession de signe + + & un changement + —. Cette équation a deux racines, l'une vraie + 2, l'autre fausse — 3. Dans l'équation cubique $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, il y a deux changements de signes + — & — +; une succession — —. On y trouve aussi trois racines, deux vraies + 2 & + 4, & une fausse — 3.

Problême XXVIII.

38. Trouver toutes les racines *rationnelles* contenues dans une équation.

Solution.



dernier membre 8 a pour produisants 2 & 4. Qu'on mette donc $x = 2$, on aura

$$\begin{array}{r} x^2 = 4 \\ -6x = -12 \\ +\ 8 = +\ 8 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

2 est la véritable racine de l'équation. Qu'on mette donc aussi $x = 4$, on aura

$$\begin{array}{r} x^2 = 16 \\ -6x = -24 \\ +\ 8 = +\ 8 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

On aura donc aussi 4 pour l'autre racine véritable de l'équation.

Soit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$, les produisants du dernier membre 15 sont 1, 3, 5 : si l'on substitue 1 à la place de x, on aura

$$\begin{array}{r} x^3 = 1 \\ -3x^2 = -\ 3 \\ -13x = -13 \\ +\ 15 = +15 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

1 est donc une des véritables racines. Qu'on substitue ensuite 3 à x, on aura

$$\begin{array}{r} x^3 = 27 \\ -3x^2 = -27 \\ -13x = -39 \\ +\ 15 = +15 \\ \hline 0 = -24 \end{array}$$

3 n'est donc pas une des véritables racines.

Qu'on ſubſtitue enfin 5 à x, on aura

$$\begin{array}{rcr} x^3 & = & 125 \\ -3x^2 & = & -75 \\ -13x & = & -65 \\ +15 & = & +15 \\ \hline 0 & = & 0 \end{array}$$

On voit par-là que 5 eſt l'autre véritable racine.

Autrement.

39. Les équations compoſées étant formées par la multiplication des ſimples (§. 37), ſi quelqu'une des racines étoit rationnelle, l'équation pourra ſe diviſer par une équation ſimple formée de x, & d'un des produiſants du dernier membre; eſſayons donc de faire cette diviſion.

Soit l'équation propoſée $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Les produiſants du dernier membre ſont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12; d'où les ſimples équations $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 4 = 0$, $x - 6 = 0$, $x + 6 = 0$, $x - 8 = 0$, $x + 8 = 0$, $x - 12 = 0$, $x + 12 = 0$ ſont compoſées. En vain voudroit-on faire la diviſion par $x - 1$, & $x + 1$; d'où il eſt facile de conclure que 1 n'eſt pas une fauſſe racine, ni une des véritables. Il faut

Par où je vois que 2 est une des racines véritables ; & comme 12 est le dernier membre dans le quotient, 8 & 12 ne sont pas dans le nombre des racines.

On essaie en vain de diviser par $x - 3$ l'équation quarrée $x^2 - x - 12 = 0$, mais on en vient à bout par $x + 3$.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{l} \quad x^2 - x - 12 \; (x + 4 \\ x + 3) \; x^2 + 3x \\ \hline \qquad - 4x - 12 \\ \qquad - 4x - 12 \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

3 est donc une fausse racine de l'équation, parceque $x - 4 = 0$, 4 est une autre racine véritable.

De même, soit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$; les produisants du dernier membre seront 1, 3, 5 ; il faut donc essayer les diviseurs $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 5 = 0$, $x + 5 = 0$. Commençons à faire la division par $x - 1$.

$$\begin{array}{l} x^3 - 3x^2 - 13x + 15 \; (x^2 - 2x - 15x - 1) \\ x^3 - x^2 \\ \hline \quad - 2x^2 - 13x \\ \quad\; 2x^2 + 2x \\ \hline \qquad - 15x + 15 \\ \qquad\; 15x + 15 \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

On voit donc que 1 eſt une racine vraie dans l'équation propoſée. On ne réuſſiroit pas à vouloir faire la diviſion par $x-3$ dans l'équation quarrée; mais on en viendroit à bout en prenant $x+3$ pour diviſeur.

Comme les problêmes ci-deſſus & les exemples rapportés ne mettent pas ſuffiſamment au fait de la formation des équations compoſées, lorſqu'on n'eſt pas bien verſé dans l'étude de l'algebre; je vais donner en peu de mots quelques explications qui ſerviront à faire concevoir la ſolution des deux problêmes précédents.

Des équations compoſées.

40. Les équations compoſées ſe forment des équations ſimples, en faiſant paſſer dans le premier membre la grandeur qui eſt dans le ſecond. De ces deux ſimples équations, par exemple, $x=a$, & $x=b$, je forme celle-ci $x-a=0$, & $x-b=0$. Je multiplie ces deux équations l'une par l'autre, c'eſt-à-dire, le premier membre de l'une par le premier membre de l'autre, & le ſecond par le ſecond; ce qui me donne l'équation

$$x-a=0$$

par conséquent autant de valeurs que l'équation a de degrés.

Les produisants d'une équation composée se nomment *racines de l'équation*, soit qu'ils soient égaux ou qu'ils ne le soient pas. Ainsi *tirer les racines d'une équation*, c'est trouver les différentes grandeurs qui l'ont produite.

Si dans une équation composée l'inconnue se trouve à un même degré dans plusieurs termes, on les écrit les uns sous les autres, parcequ'ils n'en font qu'un; ainsi $-ax-bx$ ne font qu'un terme, comme dans l'exemple cité.

Il faut observer dans la formation des équations, 1°. que le *coefficient* du second terme est égal à la somme des racines de l'équation; 2°. que dans les équations qui ont plus de trois termes, le coefficient du troisieme comprend les produits des racines multipliées deux à deux de toutes les façons qu'elles peuvent se multiplier; 3°. que dans les équations qui ont plus de quatre termes, le coefficient du quatrieme contient les produits des quatre racines multipliées trois à trois, & ainsi des autres équations qui ont plus de cinq, six termes, &c. 4°. enfin, que, dans toutes les équations, le dernier terme est une quantité toute connue, qui est le produit de toutes les racines.

Corollaire.

41. Si le second terme manque dans une équation, il faut nécessairement qu'il y ait des racines positives & des négatives qui s'entre-détruisent; si le troisieme terme manque dans celles qui en ont plus de trois, il faut qu'il y ait des produits des racines négatifs, & d'autres positifs qui s'entre-

détruisent; si le quatrieme, &c. Lorsque l'équation a tous ses termes, on la résout facilement en se rappellant que le quarré de tout binome $x + b$ contient dans son premier terme le quarré du premier terme x du binome, deux fois le premier terme x multiplié par le second, ou le double du second multiplié par le premier; & enfin le quarré du second. Nous avions déja fait presque toutes ces observations, §. 37.

Problême XXIX.

42. Extraire par approximation la racine de quelque équation que ce soit.

Solution.

Pour donner plus de clarté à la regle, nous allons l'appliquer aux exemples, en commençant par l'équation quarrée.

Soit $x^2 - 5x^1 - 31 = 0$. Supposons que la racine est $8 + y$, en sorte que y marque l'excès ou le défaut de 8 à l'égard de la racine : on aura donc

$$\begin{aligned} xx &= 64 + 16y + yy \\ -5x &= -40 - 5y \\ -31 &= -31 \end{aligned}$$

$$7 + 11y + yy = 0.$$

Mais comme la valeur de x dans les parties décimales n'eſt pas encore aſſez déterminée, mettez $x = 8.6 + y$, & en recommençant l'opération vous trouverez

$$\begin{aligned} xx &= \tfrac{7396}{100} + \tfrac{172}{10}y + yy \\ -5x &= -\tfrac{430}{10} - 5y \\ -31 &= -31 \end{aligned}$$

$$\tfrac{396}{700} - \tfrac{430}{10} - 31 + \tfrac{172}{10}y - 5y = 0.$$

Ayant réduit les fractions à la même dénomination, l'équation ſe change en

$$\begin{aligned} 7396 - 4300 - 3100 + (1720 - 500)y &= 0 \\ -0.04 + 12.20y &= 0 \\ 12.20y &= 0.04 \\ y &= 0.0032. \end{aligned}$$

Cette opération donne donc la racine cherchée $8.6000 + 0.0032 = 8.6032$.

Si l'on deſire une racine encore plus exacte, il faudroit mettre $x = 8.6032 + y$; d'où l'on auroit $xx = 74.01505024 + 17.20640000y + yy - 5x = -43.01600000 - 5.00000000y - 31 = -31.00000000$.

$$\begin{aligned} -0.000094976 + 12.20640000y &= 0 \\ 12.20640000y &= 0.000094976 \\ y &= 0.000077808 \\ \text{Donc}\quad x &= 8.603277808 \end{aligned}$$

Voyons à préſent la maniere d'extraire la racine

de l'équation cubique $x^3+2xx-23x-70=0$. Mettez

$$\underline{5+y=x}$$

On aura
$$x^3 = 125+75y\ldots$$
$$2x^2 = 50+20y\ldots$$
$$-23x^1 = -115-23y$$
$$-70 = -70$$

$$-10+72y=0$$
$$\underline{72y=10}$$
$$y=0.1$$

Par conséq. $x=5+0.1=5.1$

Mettez ensuite $x=5.1+y$; vous aurez
$$x^3=132.951+78.030y\ldots$$
$$2xx = 52.020+20.400y\ldots$$
$$-23x = -11.300-23.000y\ldots$$
$$-70 = -70.000$$

$$-2929 = 95.430y = 0$$
$$\underline{75.430y=2.629}$$
$$y=0.0348$$

Par conséq. $x=5.1+0.0348=5.1348$.

Pour trouver plus facilement la racine dans une

$$x^3 = 125 + 75y + 15yy$$
$$2x^2 = 50 + 20y + 2yy$$
$$-23x = -115 - 23y$$
$$-70 = -70$$

$$-10 + 72y\ 17yy = 0$$
$$17yy + 72y = 10$$

$$yy + 4.23552y = 0.58823530$$
$$4.484229764 = 4.484229764$$

$$yy + 4.23552y + 4.484229764 = 5.07246506$$

$$y + 2.1176 = 2.2522$$
$$y = 0.1346$$

donc $x = 5.1346$

Si l'on mettoit de rechef $x = 5.1346 + y$, & qu'on cherchât la valeur de y comme auparavant, on approcheroit de si près de la véritable racine dans ce second calcul, qu'on y toucheroit pour ainsi dire.

Fin de l'Algebre.

FAUTES A CORRIGER

dans le premier volume.

CALCUL LITTÉRAL.

COMME on pourroit croire qu'il manque quelque chose dans les problêmes sur l'opération des fractions avec des grandeurs entieres, où l'on passe du problême II au problême VI, sans que l'on trouve les problêmes intermédiaidiaires III, IV & V; voici la maniere de remplir cette lacune qui n'est qu'apparente.

Page 123. *Remarque.* Si l'on propose de multiplier ou de diviser, &c. effacez ce mot *Remarque*, & tout l'*alinéa* qui le suit, & mettez en place: *Problême III.* Multiplier ou diviser des grandeurs entieres avec des fractions, par des grandeurs entieres & des fractions.

Page 124. *Remarque.* Présentement qu'on sait le calcul des grandeurs entieres, &c. effacez ce mot *Remarque*, & tout l'*alinéa* suivant, & mettez à la place: *Problême IV.* Faire une division complexe, composée de grandeurs entieres & de fractions, & dont le diviseur est pareillement composé de fractions.

Page 125. *Corollaire.* On doit voir par cette méthode qui enseigne à employer le calcul des fractions, &c. effacez ce mot *Corollaire*, & tout l'*alinéa* qui le suit, & mettez en place: *Problême V.* Continuer une division à l'infini, quand même le dividende & le diviseur n'auroient point de grandeurs semblables.

Page 184, à la marge, Pl. III, *lisez* Pl. II.

Page 221, *ligne* 7, EA : AF = CD, *lisez* = EC.

Page 238, *ligne* 2, 144, *lisez* 44.

Ibid. ligne 29, Mesurez, *lisez* Menez.

Page 251, *ligne* 17, 892, *lisez* 8920.

Page 278, *ligne* 17, 28', *lisez* 29'.

Page 304, *ligne* 18, = C, *lisez* = G.

Page 327, *ligne* 9, 5742, *lisez* 4572.

Ibid. ligne 11, *effacez* 280.

Page 329, *ligne* 6, le point, *lisez* le poids.

Page 342, *ligne* 26, Mettre en mouvement une machine élastique, *lisez* par la force élastique.

3

4

5

6

Fig 3

94084

24186

41794

54284

63968

71880

78568

84358

89464

94080

grosses epingles qui servent d'indices ou de
ent les petites epingles qui servent pour

N.° I

3

5

6

8

9

12

13

16

17

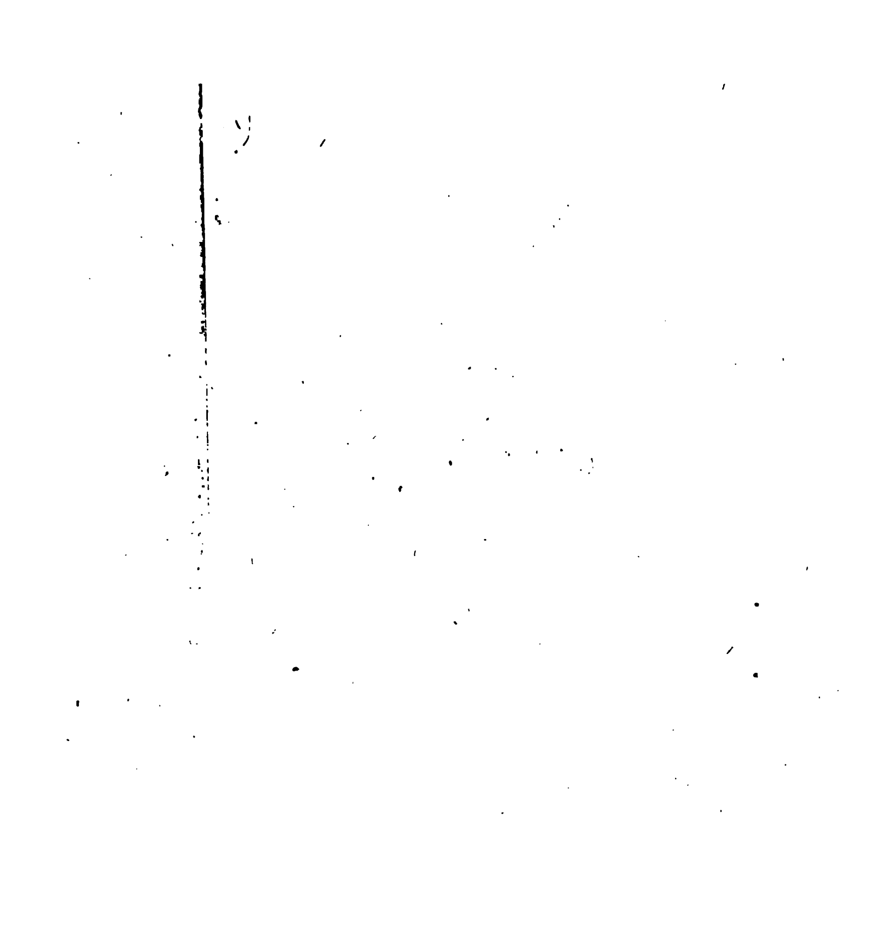
20

21

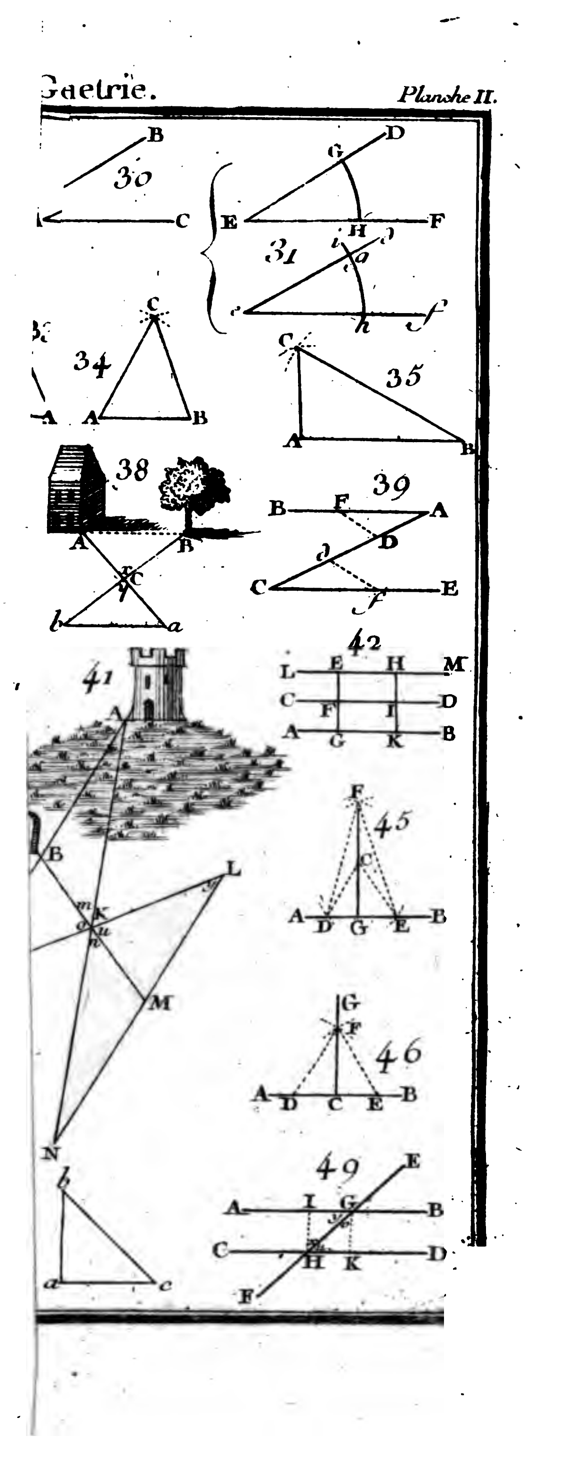
24

25

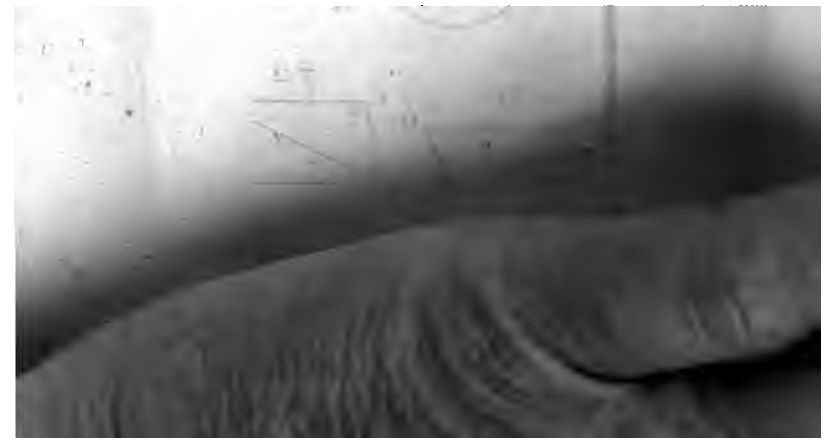
28

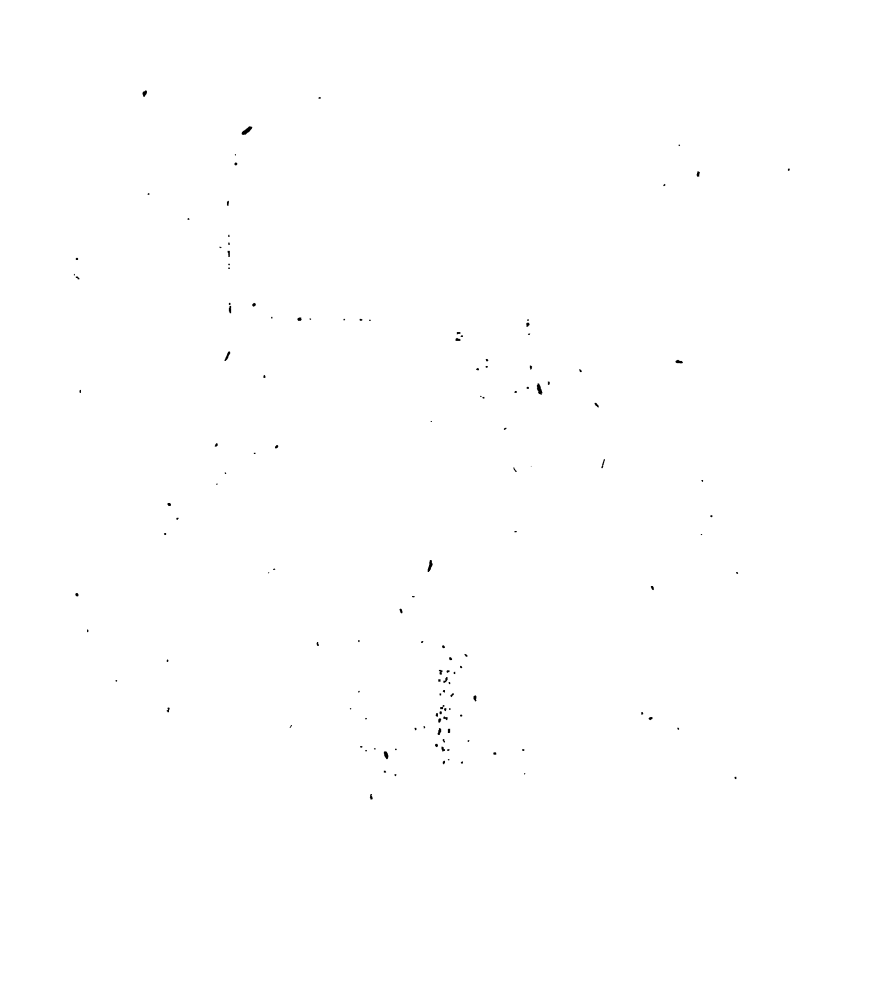


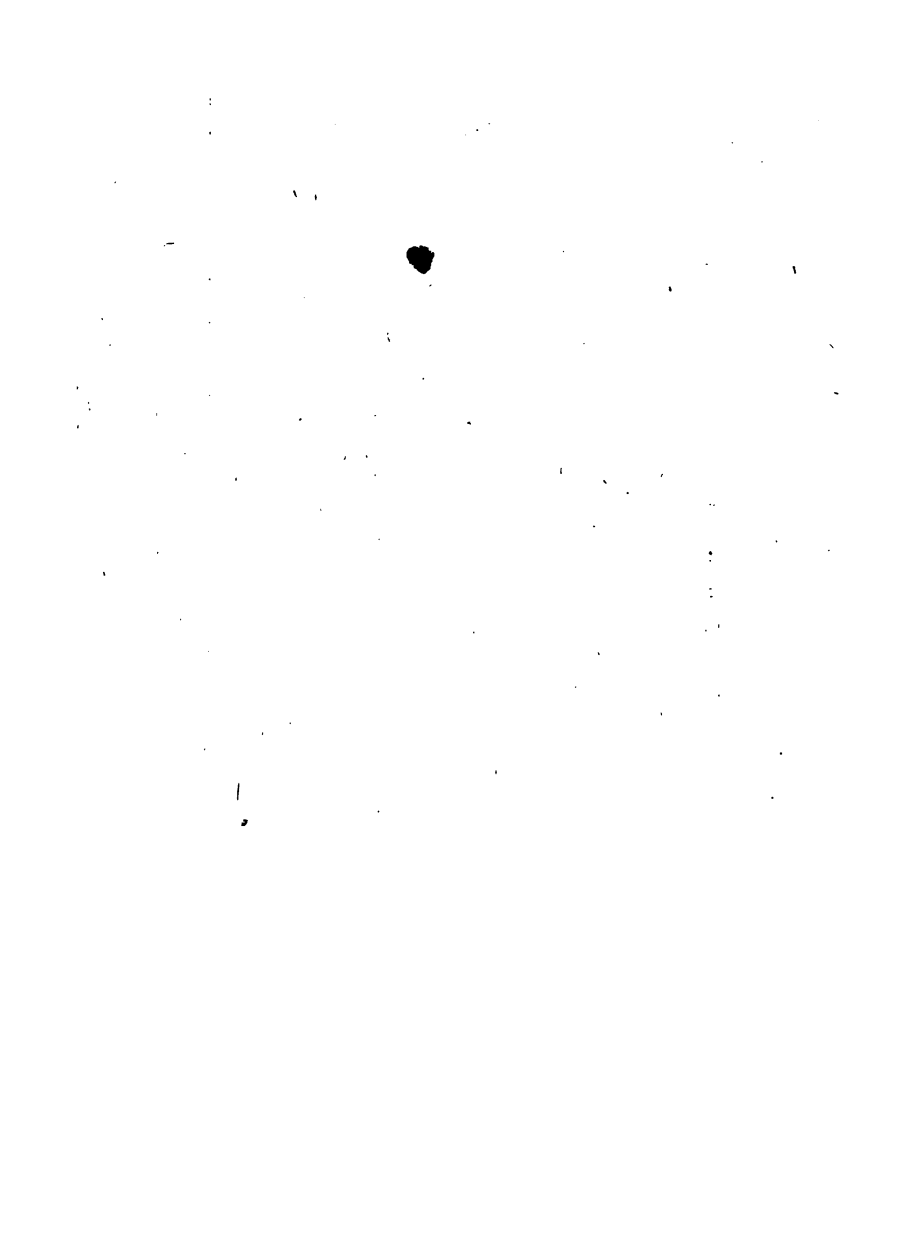
Géométrie. Planche II.





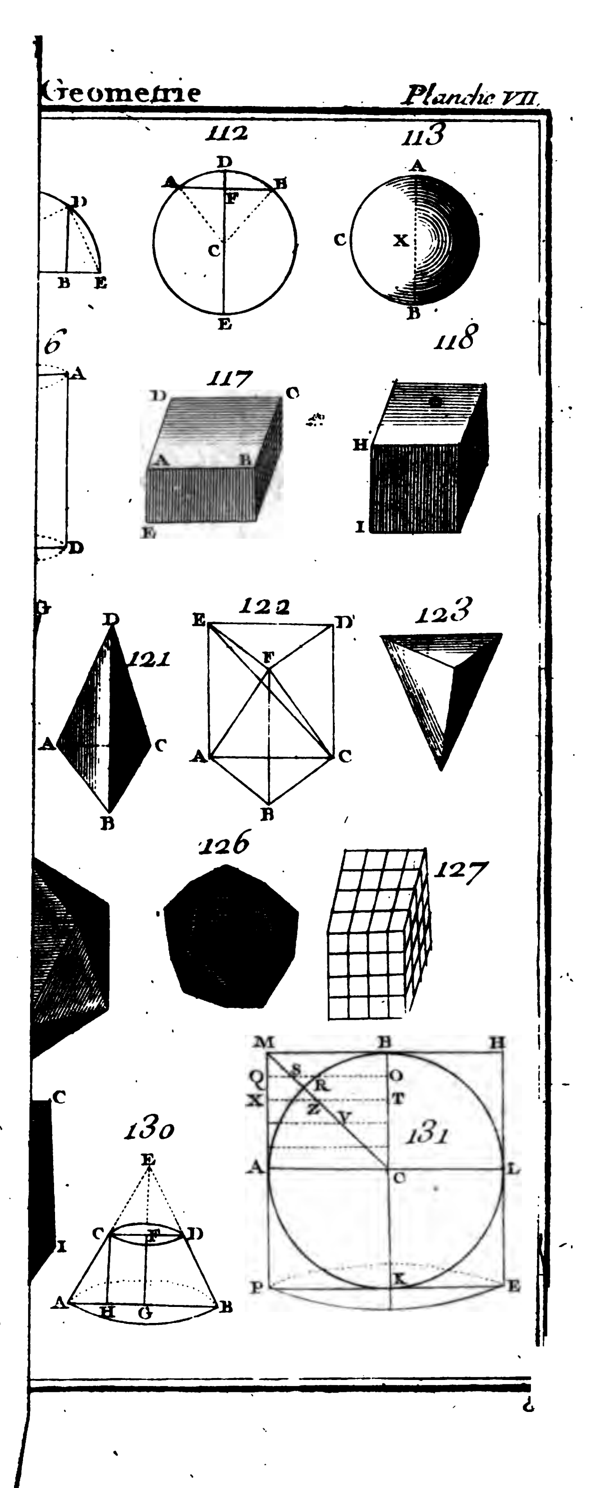




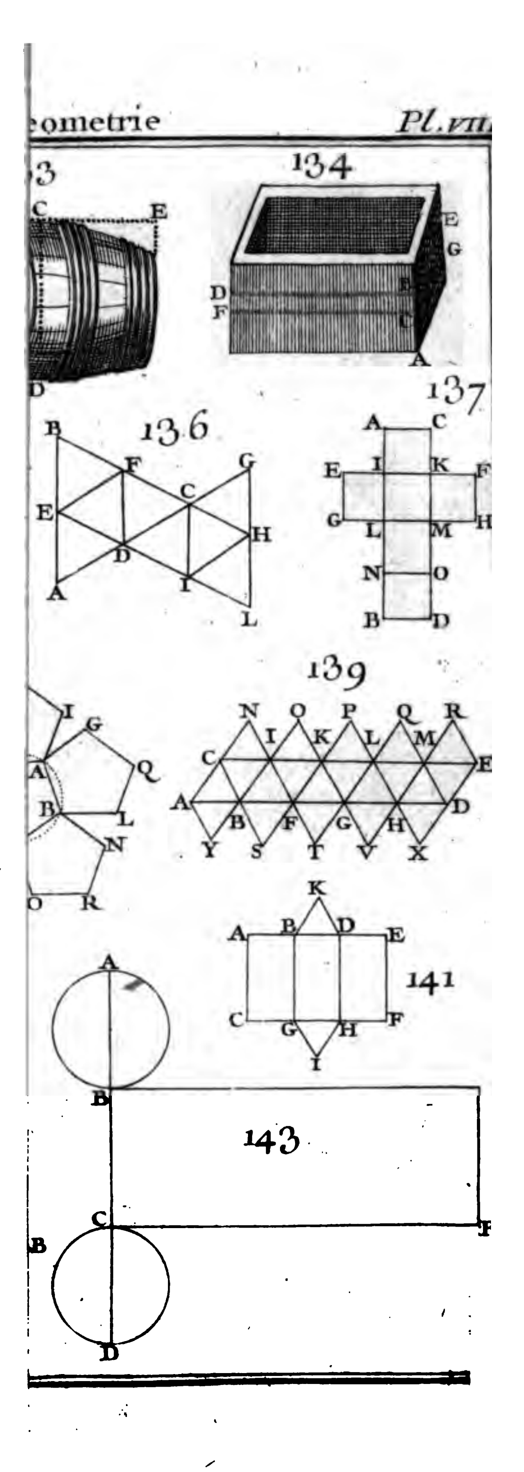







112
D
A
B
F
C
E
113
A
C
X
B
D
B
E
6
A
D
117
D
C
A
B
E
118
H
I
G
D
121
A
C
B
122
E
D
F
A
C
B
123
126
127
C
I
130
E
C
F
D
A
H
G
B
M
B
H
Q
S
R
O
X
T
Z
V
131
A
C
L
P
K
E




eometrie
Pl. VIII
134
136
137
139
141
143

Trigonometrie



2 I B D H E

3 F I H G

5 A B

6 A C B E D

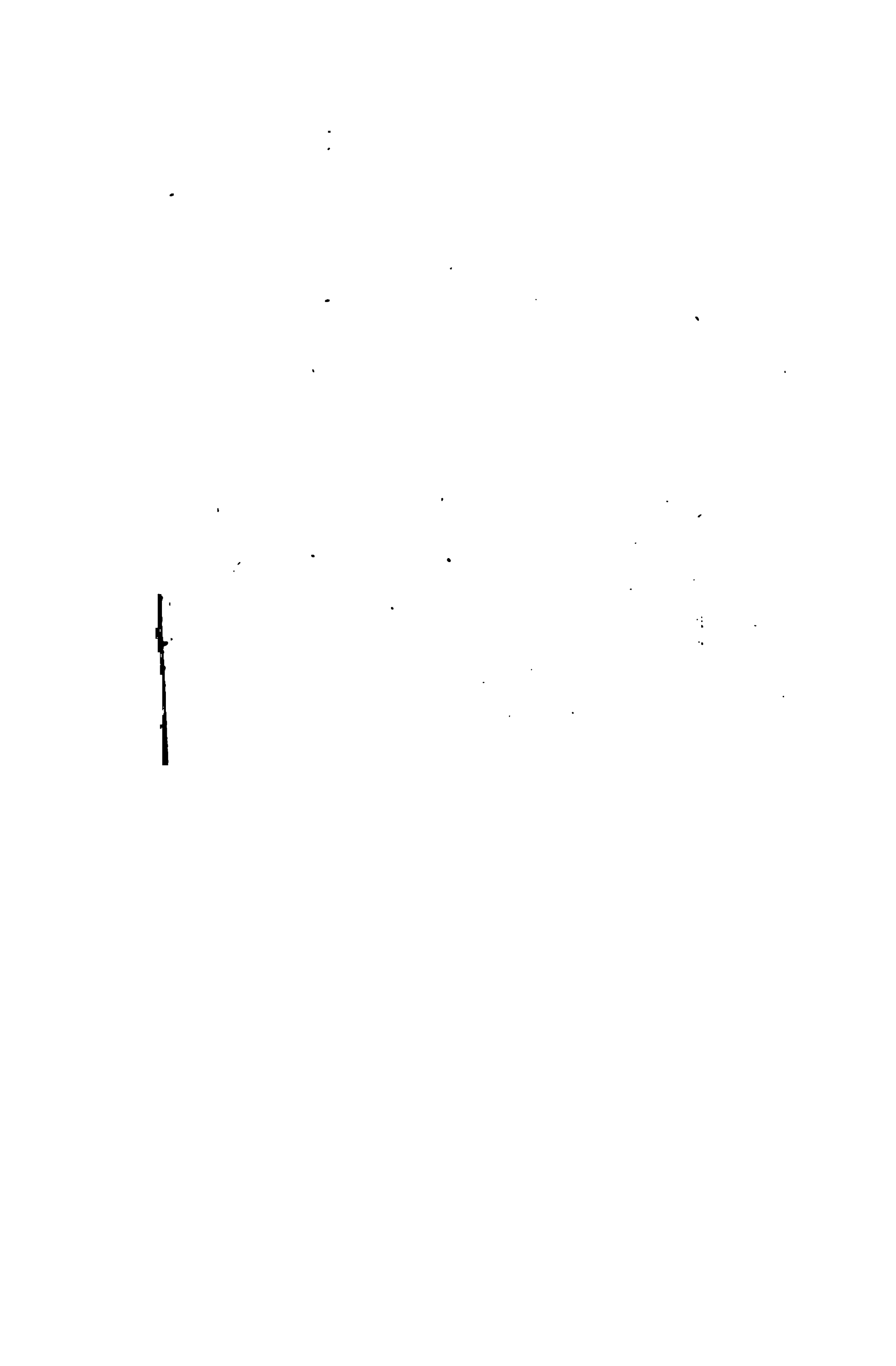
8 I L M K

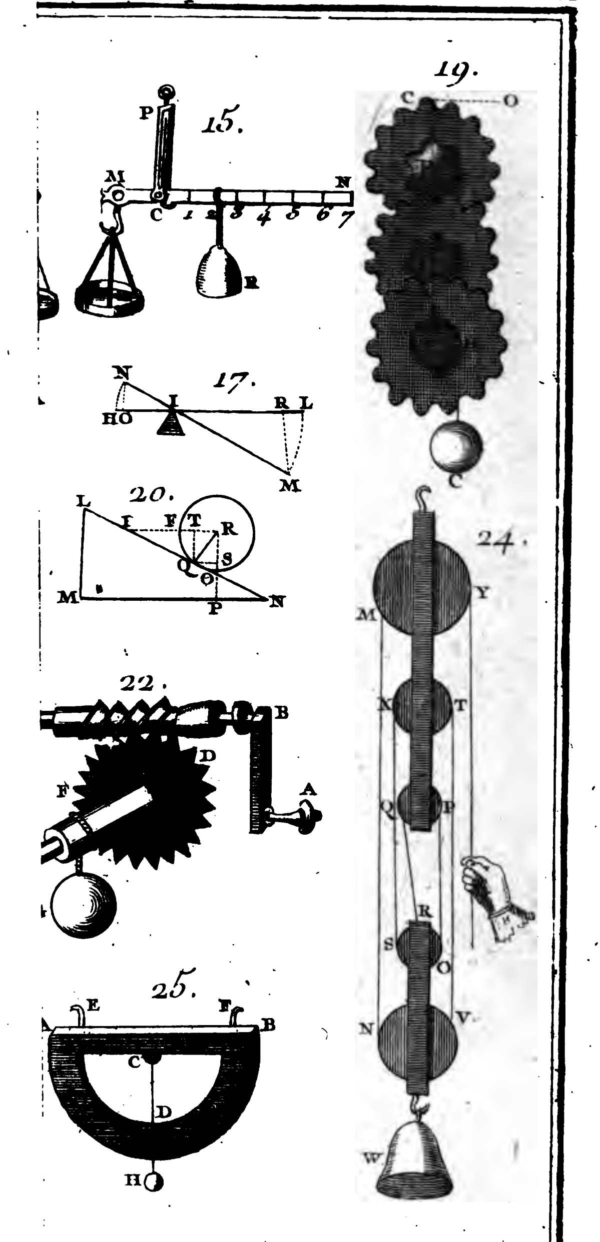
9 M C P N L

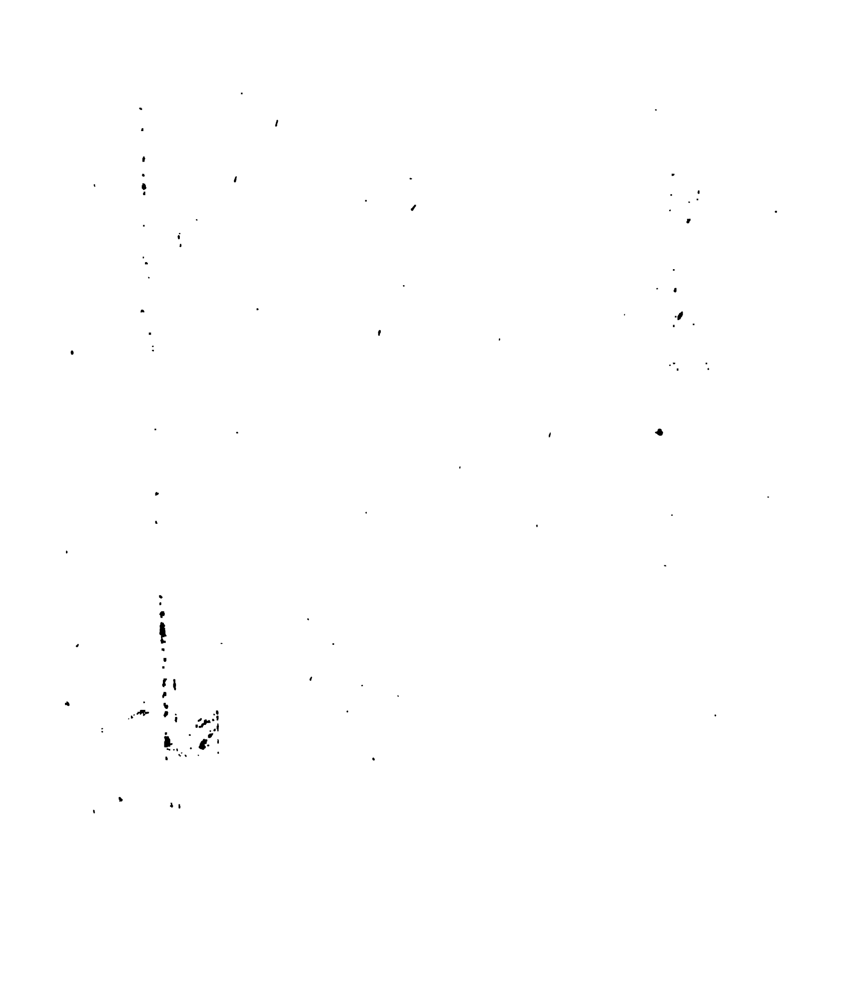
10 A B E D

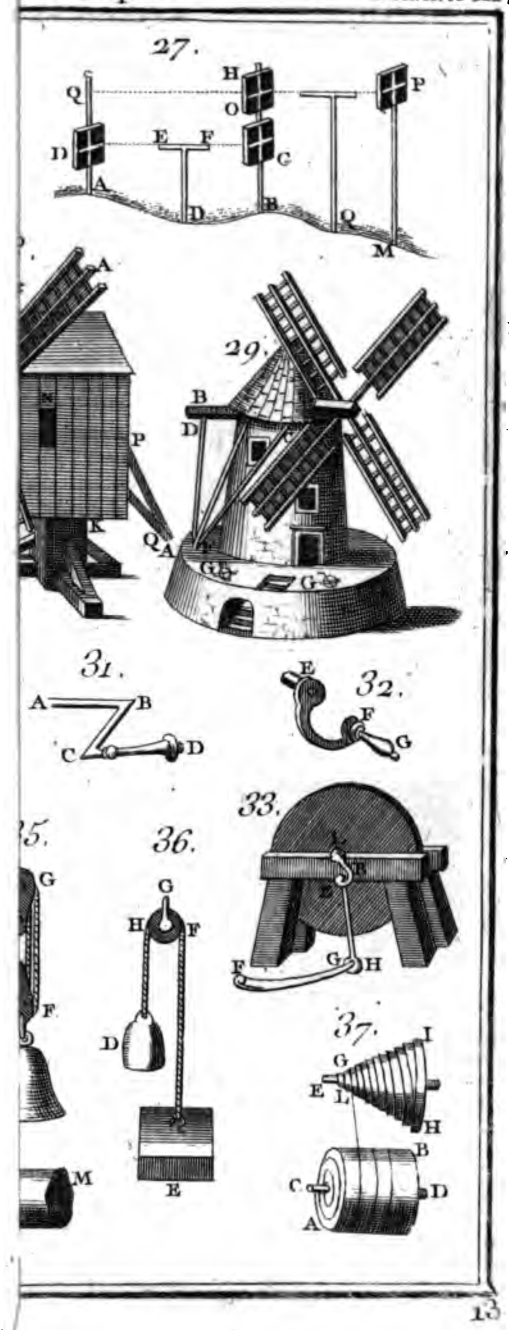
13 A B C D F E I G H

2




15.
P
M
N
C
1 2 3 4 5 6 7
R
17.
N
I
R L
H O
M
20.
L
I F T
R
S
Q
O
M
P
N
22.
B
D
F
A
25.
E
F
A
B
C
D
H
19.
C
O
C
24.
M
Y
N
T
Q
P
R
S
O
N
V
W

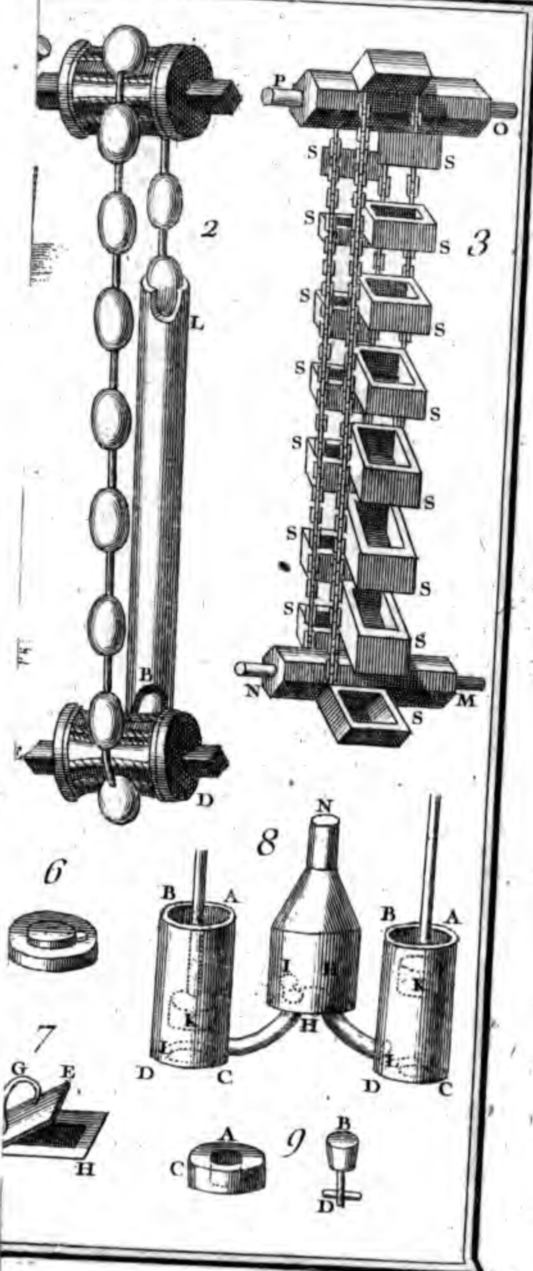


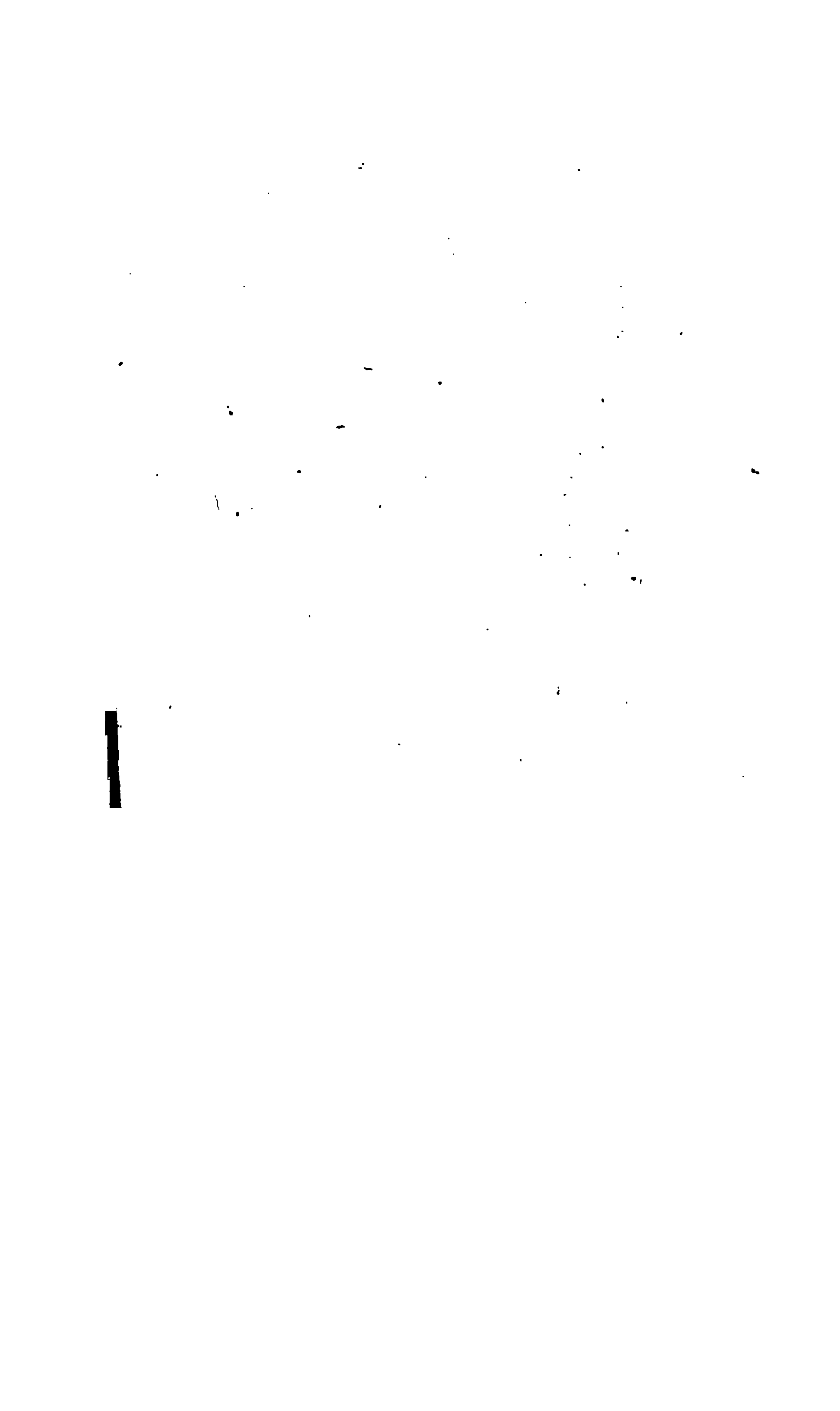

27.
Q
H
P
O
D
E
F
G
A
B
D
Q
M
29.
B
D
P
N
K
Q
A
31.
A
B
C
D
32.
E
F
G
33.
L
B
F
G
H
35.
G
F
M
36.
G
H
F
D
E
37.
I
G
E
L
H
B
C
D
A

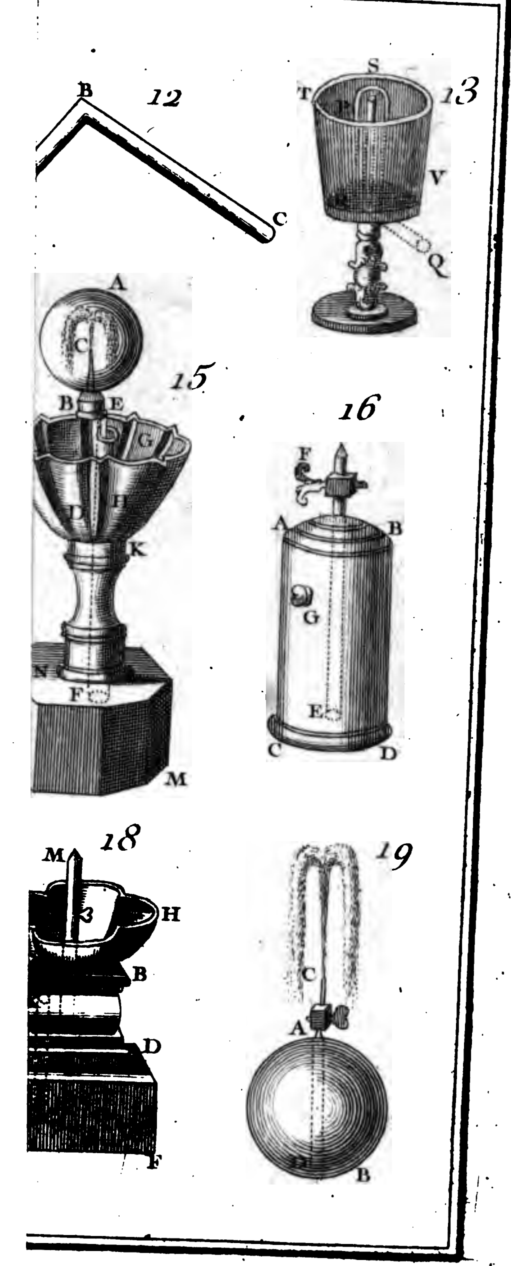
Hydrostatique.

Airometrie.

Fig. Ire.


2
L
B
D
P
O
S
3
N
M
8
N
6
B
A
I
K
H
7
G
E
D
C
9
A
C
H
B
D




12
B
C
13
S
T
P
V
Q
15
A
C
B
E
G
D
H
K
N
F
M
16
F
A
B
G
E
C
D
18
M
H
B
D
F
19
C
A
B

